Лекция 1

Предмет и метод НГ

НГ является одной из ветвей геометрии и имеет ту же цель, что и геометрия вообще, а именно: *изучение форм предметов окружающего нас действительного мира, соотношений между ними, установление соответствующих закономерностей и применение их к решению практических задач.*

НГ выделяет то обстоятельство, что для решения общегеометрических задач она использует *графический путь*, при *котором графические свойства фигур изучаются непосредственно по чертежу.* В других ветвях геометрии чертеж используется как вспомогательное средство (для иллюстрации свойств фигур).

Не всякое изображение может служить средством изучения свойств фигур. Для того, чтобы чертеж был геометрически равноценен оригиналу он должен быть построен по определенным геометрическим законам.

В НГ каждый чертеж строится при помощи **метода проецирования**. Поэтому **чертежи**, применяемые в НГ называются **проекционными**.

Т. о. содержанием НГ является:

- установление способов построения проекционных чертежей

- решение геометрических задач, относящихся к пространственным фигурам

- приложение способов НГ к исследованию теоретических и практических задач науки и техники.

В наше время нелегко указать на такой вид человеческой деятельности, где бы в большей или меньшей степени не приходилось бы прибегать к помощи чертежей.

Существуют следующие разновидности чертежей:

1. Машиностроительные чертежи
2. Строительные чертеже.
3. Картография.

«Чертеж является языком техники». - Гаспар Монж.

«Если чертеж является языком техники, то НГ служит грамматикой этого языка, так как она учит правильно читать чужие мысли и излагать свои, пользуясь в качестве слов только линиями и точками как элементами всякого изображения» - проф. В.И. Курдюмов.

Основные задачи курса

1) изучение методов построения изображений;
2) умение читать данные изображения;
3) изучение графических методов решения пространственных геометрических задач на чертеже для применения в различных областях науки и техники;
4) развитие пространственного мышления и логики;
5) умение использовать справочную литературу и стандарты ЕСКД;

Выполнение чертежей с учетом основных положений конструирования и технологии, а также в соответствии со стандартами ЕСКД

Начертательная геометрия является одним из разделов геометрии, в котором отображение и исследование пространства производится путем изображения элементов пространства методами проецирования.

Основные требования, предъявляемые к чертежам:

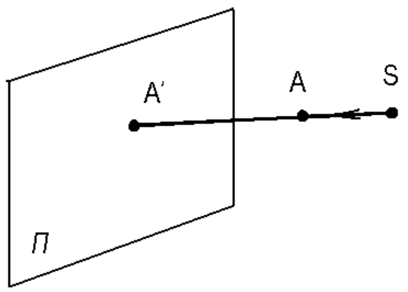
– наглядность – чертеж должен давать пространственное представление об изображаемом предмете;
– обратимость, т.е. единственным образом определять форму и положение изображаемого предмета;
- простота и точность графических построений.

Одним из основных понятий геометрии является геометрическая фигура.

Геометрической фигурой называется любое множество точек расположенное в определенно порядке.

В начертательной геометрии фигуры отображаются на плоскость способами центрального и параллельного проецирования.

1. Центральная проекция (перспектива)



Пусть дана плоскость *П* – *плоскость проекций,* точка *S* вне пл. *П* (*S – центр проекций)*.

Для построения изображения или проекции точки A на пл. П проводим через центр проекций S и т. A луч SA до пересечения его с пл. П в точке A\`.

SA – проецирующий луч, A\` проекция точки A

$A` = SA \cap П$

Проецирование можно осуществлять для любой точки пространства за исключением точек, лежащих в плоскости проходящей через т. S и параллельной плоскости проекций П. Т. к. каждая геометрическая фигура (прямая, плоскость и т.д.) есть некоторая совокупность точек, то *проекция фигуры - это совокупность проекций всех ее точек.*

Однако для построения проекции фигуры совершенно необязательно проецировать все ее точки.

Проекция отрезка прямой определяется проекцией двух точек, плоскости 3 точки. Проекция многогранника – проекция его вершин

Основные свойства центральных проекций.

1. Геометрические фигуры отображаются следующим образом:

а) точка проецируется точкой;

б) прямая в общем случае проецируется прямой. Проецирующая прямая отображается одной точкой;

в) плоская фигура в общем случае отображается плоской фигурой. Плоская фигура, принадлежащая проецирующей плоскости, отображается прямой;

г) трехмерная фигура отображается двумерной.

2. Центральные проекции фигур сохраняют взаимную принадлежность фигур (например, если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой).

Метод центрального проецирования слишком сложен и в значительной степени искажает форму и размеры оригинала, так как не сохраняет параллельности прямых и отношения отрезков. Поэтому на практике чаще используют метод параллельного проецирования.

2. Параллельное проецирование

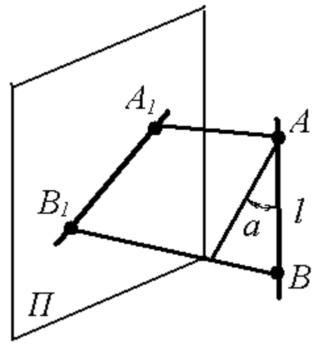
Пусть дана плоскость проекций П и направление проецирования $\vec{S}$ причем $\vec{S} \neq \Pi$. Центр проекций S удален в бесконечность.

Все проецирующие лучи как пересекающиеся в бесконечности параллельны направлению $\vec{S}$.

Чтобы построить проекцию А` какой-либо точки А проводят проецирующую прямую $SA \parallel \vec{S}$, а затем находят т. А` = SA∩П.

Свойства параллельного проецирования:

1. Проекцией точки является точка



2. Проекции линии (прямой) является линия (прямая).

Прямые, проецирующие точки А, В прямой l лежат в одной плоскости, проходящей через прямую $l \parallel$ направлению проецирования $\vec{S}$. Эта плоскость называется ***проецирующей плоскостью*.** Если прямая l будет проецирующей прямой, то ее проекция выродится в точку.

3. Проекции точки, лежащей на некоторой прямой, является точка на проекции этой прямой.

4. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые (свойство сохранения параллельности)

5. Отношение проекций отрезков параллельных прямых, или одной и той же прямой равно отношению самих отрезков.

6. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.

3. Ортогональное (прямоугольное) проецирование.

Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования, когда направление $\vec{S} \perp$П: A`B` = AB*cos α

Ортогональная проекция получила наибольшее распространение в технических чертежах, т.к. она позволяет более легко судить о размерах изображаемых объектов.

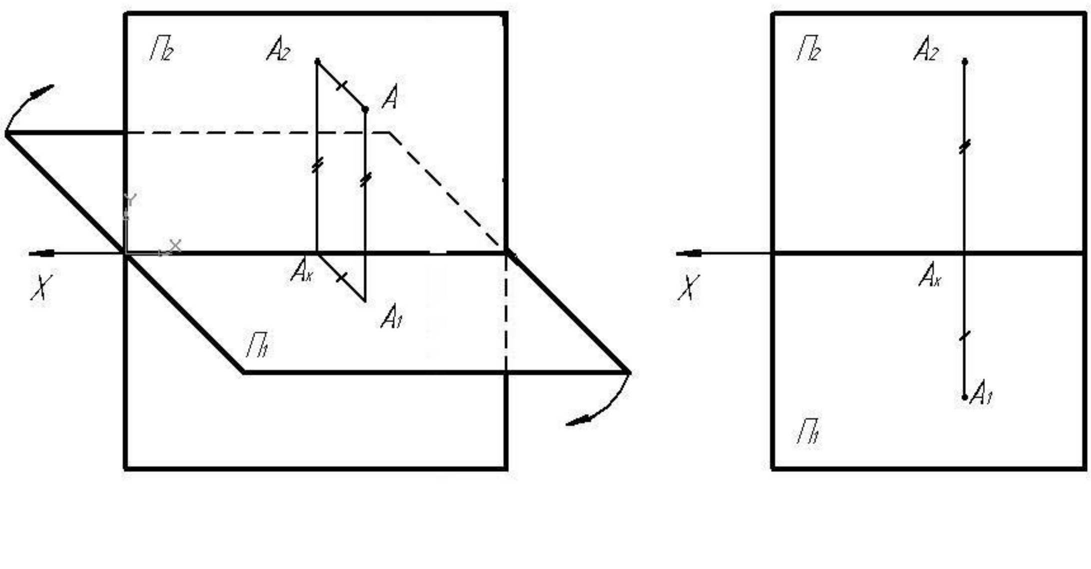
Рассмотренные выше методы проецирования позволяют однозначно решать *прямую задачу*, т.е. *по данному оригиналу строить его проекционный чертеж.*

Однако *обратная задача (по заданному чертежу воспроизвести (реконструировать) оригинал* решена быть не может, т.е. рассмотренные проекционные чертежи не обладают свойством **обратимости**. Для построения обратимых чертежей проекционный чертеж дополняют необходимыми данными. Существуют различные методы такого дополнения. В данном курсе будут рассматриваться только 2 вида обратимых чертежей: *комплексный чертеж в ортогональном проецировании и аксонометрические чертежи.*

4. Комплексный чертеж точки.

Наибольшее распространение в технической практике получил чертеж, составленный из двух и более связанных между собой ортогональных проекций изображаемого оригинала. Такой чертеж называется **комплексным чертежом (эпюром Монжа).**

Сущность метода Монжа заключается в ортогональном проецировании геометрических фигур на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем соответствующим образом совмещаются с плоскостью чертежа.

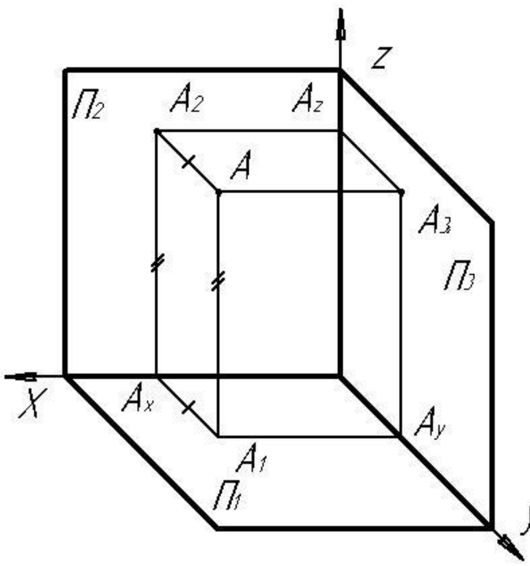


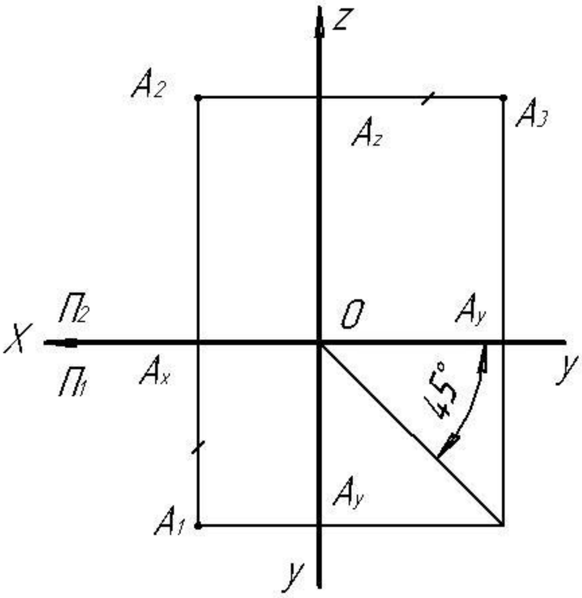
Комплексный чертеж (эпюр Монжа) на две ортогональные плоскости проекций: $П_1$ – горизонтальная плоскость проекций, П2 – фронтальная плоскость проекций, X – ось проекций, A1 – горизонтальная плоскость проекций точки А, A2 – фронтальная проекция точки А.

Две плоскости делят пространство на 4 четверти, т.е. четверти пространства образуются путем деления его двумя взаимно-перпендикулярными плоскостями.

Однако реконструкция оригинала у которого имеются профильные прямые или плоскости становится проще если помимо двух основных проекций имеется еще одна проекция на третью плоскость. В качестве такой плоскости выбирают плоскость $П_3 \perp$ П1 и $П_3 \perp П_2$ – **профильная плоскость проекций.**

При делении пространства тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями получается 8 октантов.





$A_1A_2 \perp x$, $A_1A_3 \perp y$, $A_2A_3 \perp z$ – линии связи.

Для построения профильной проекции A_3 точки А заданной ее горизонтальной A_1 и фронтальной A_2 проекциями, нужно через A_2 провести линию связи $\perp$ оси z, на которой отложить отрезок от оси z: $A_1A_x = A_3A_z = y$. *Таким образом, для определения положения точки в пространстве достаточно двух проекций.*

5. Пространственная система координат.

Чтобы иметь возможность точного построения комплексных чертежей каких-либо оригиналов необходимо уметь задавать положение проекций точек определяющих данные оригиналы при помощи чисел. Для этого *использують координатный метод.*

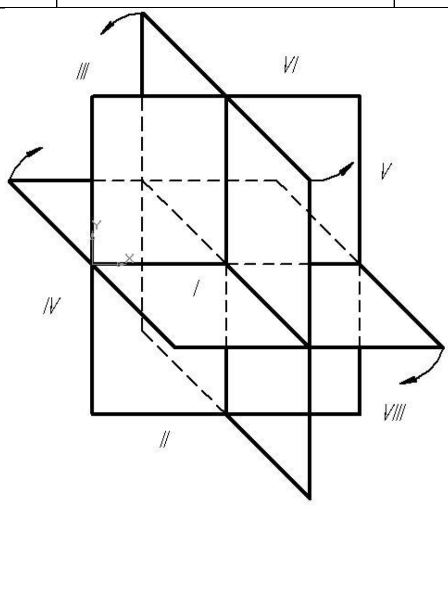
Координатами X, Y, Z точки называются числа, выражающие ее расстояния до трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

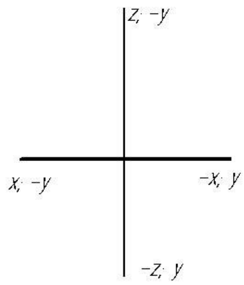
Координата *X* определяет расстояние точки до профильной плоскости, координата *Y* – до фронтальной плоскости, координата *Z* – до горизонтальной плоскости проекций.

1. Если все три координаты точки не равны *0*, то точка расположена в пространстве.
2. Если какая-либо координата точки равна *0*, то точка принадлежит той плоскости проекции, до которой ее расстояние равно нулю.
3. Если две координаты точки равны *0*, то сама точка принадлежит одной из осей проекций: *x, y* или *z*

Три координатные плоскости делят пространство на **8 октантов**. Обычно для удобства чтения чертежей предметы располагают в I-ом октанте.

Октанты	Знаки		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

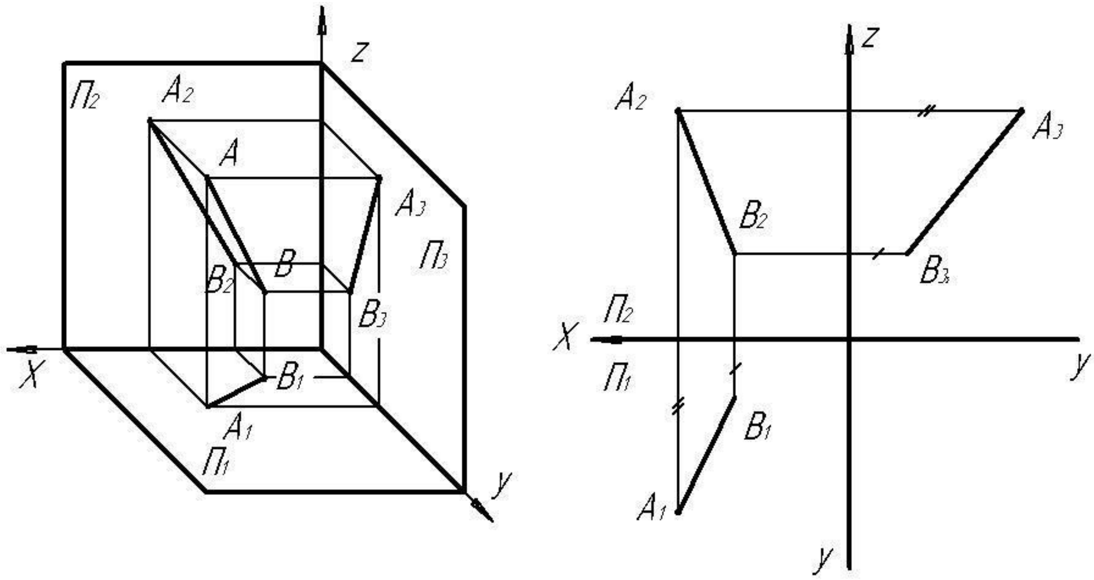




6. Прямая.

Способы задания.

Прямая линия в пространстве определяется двумя точками, поэтому *на комплексном чертеже всякая прямая l может быть задана проекциями двух ее точек.*



Задание прямой на комплексном чертеже:

1. Прямая может быть задана проекциями двух точек (проекция прямой – прямая),

2. Проекцией точки и вектора,

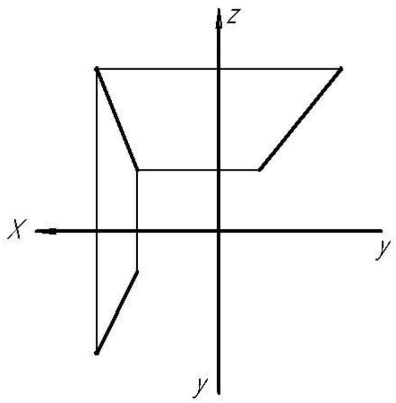
3. Проекциями линий пересечения двух плоскостей.

Чаще всего прямая задается **отрезком**. Координаты концов отрезка обозначаются буквами. Если фиксация концов не нужна, то прямую обозначают строчной (маленькой) буквой.

8. Положение прямой относительно плоскостей проекций.

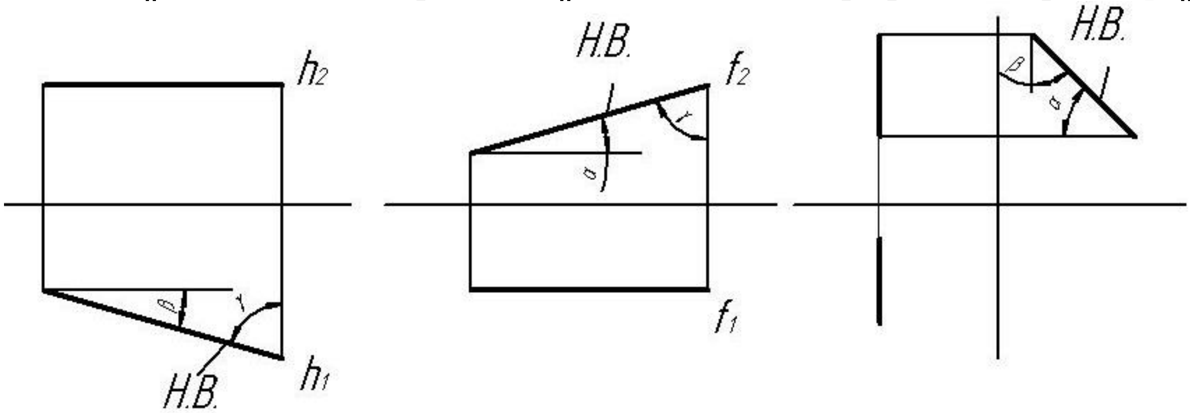
А) прямая общего положения (не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций) Ни на одну плоскость проекций не проецируется в натуральную величину.

Величина проекции отрезка прямой общего положения всегда меньше натуральной величины самого отрезка, поэтому непосредственно по чертежу нельзя определить натуральную величину отрезка такой прямой.



Б) прямые уровня – параллельны одной из плоскостей проекций.

Горизонталь ‖ $П_1$ Фронталь ‖ $П_2$ Профильная прямая р ‖ $П_3$



α, β, γ, - углы наклона прямой к горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостям проекций соответственно

Прямая уровня проецируется в натуральную величину на ту плоскость проекций, параллельно которой она расположена, а на две другие плоскости проецируется в виде прямых, параллельных осям проекций

__Горизонталь__ (прямая *h* на рис). Все точки горизонтали удалены на одинаковые расстояния от плоскости проекций $П_1$, поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси *x* ($h_2 \parallel x$). Горизонтальная проекция горизонтали располагается наклонно к оси *x*. Величина ее равна натуральной величине самой горизонтали. Угол β между h_1 и осью *x* равен натуральному углу между горизонталью и плоскостью $П_2$.

__Фронталь__ (прямая *f* на рис). Все точки фронтали удалены на одинаковые расстояния от плоскости проекций $П_2$, поэтому горизонтальная проекция любой фронтали параллельна оси *x* ($f_1 \parallel x$). Фронтальная проекция располагается наклонно к оси *x*. Величина ее равна натуральной величине самой фронтали. Угол α между f_2 и осью *x* равен натуральному углу между фронталью и плоскостью $П_1$.

<u>Профильная прямая уровня</u>. Все точки профильной прямой удалены на одинаковое расстояние от плоскости проекций Π_3, поэтому горизонтальная проекция любой профильной прямой параллельна оси *y*, а фронтальная – *z*. Профильная проекция наклонена к осям *y* и *z*. Величина ее равна натуральной величине самой прямой.

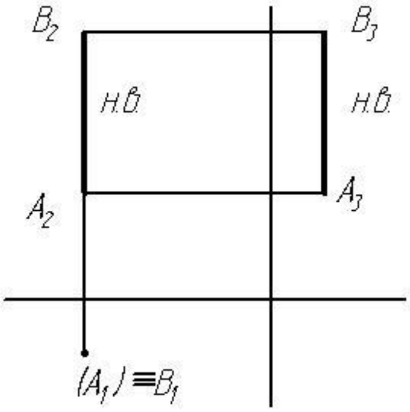
В) Проецирующие прямые - перпендикулярные к одной из плоскостей проекций.

Проецирующие прямые на плоскостях проекций, перпендикулярно которым они расположены, изображаются в виде точки.

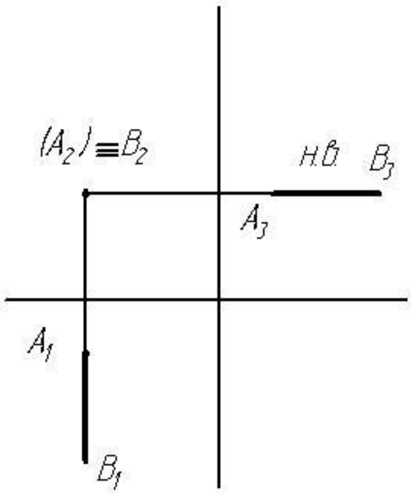
Проекция прямой в виде точки обладает собирательным свойством: в эту точку проецируются все точки прямой.

Проецирующие прямые на плоскости проекций, параллельно которым они расположены, проецируются в натуральную величину.

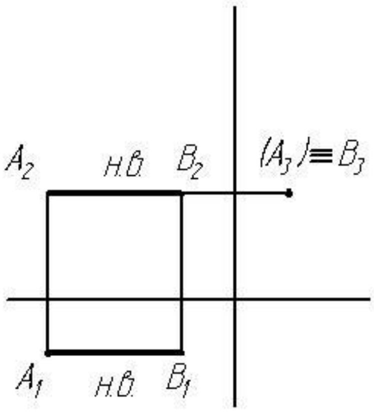
горизонтально-проецирующая $AB \perp \Pi_1$



фронтально-проецирующая $AB \perp \Pi_2$



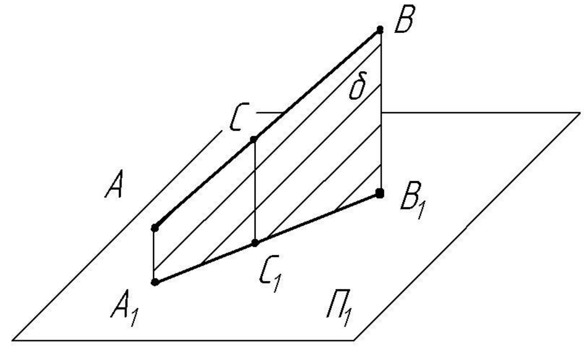
профильно-проецирующая $AB \perp \Pi_3$



<u>8. принадлежность точки прямой.</u>

<u>Если в пространстве точка лежит на прямой, то и проекции этой точки принадлежат одноименным проекциям этой прямой</u>.

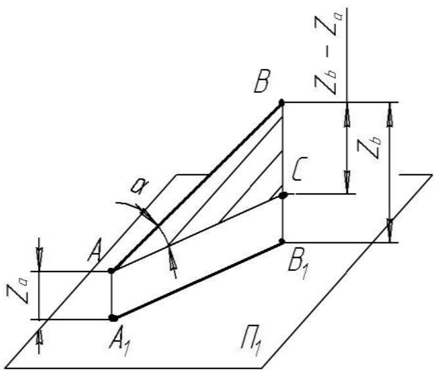
Обратная теорема: Если на чертеже проекции точки лежат на одноименных проекциях прямых, то точка принадлежит прямой.

	С€АВ плоскость $\delta \perp П_1$ АВ$\in$ δ $A_1B_1 \in \delta$ $\Rightarrow$ $C_1 \in A_1B_1$ $CC_1 \in \delta$

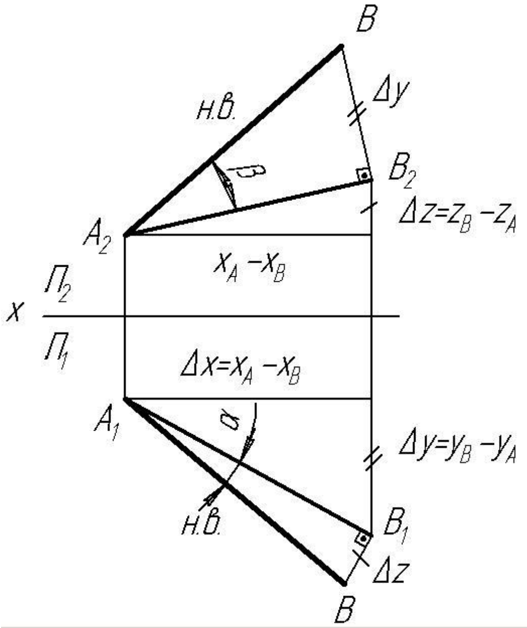
9. Определение натуральной величины отрезка прямой линии и углов наклона прямой к плоскости проекций способом прямоугольного треугольника.

Если отрезок прямой АВ занимает общее положение по отношению к $П_1$, $П_2$, $П_3$, то он проецируется на них с искажением (проекция меньше самого отрезка).

Построение на горизонтальной плоскости проекций $П_1$



$AC=A_1B_1$
$BC=Z_b\text{-}Z_a$
АВ – натуральная величина.
1.Гипотенуза прямоугольного треугольника н.в. АВ
2. <САВ – искомый угол.



Угол, расположенный напротив катета, равного разности координат $Z_b\text{-}Z_a$ – искомый угол.

Задача: определить натуральную величину отрезка АВ.

$$AB = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2}\ .$$

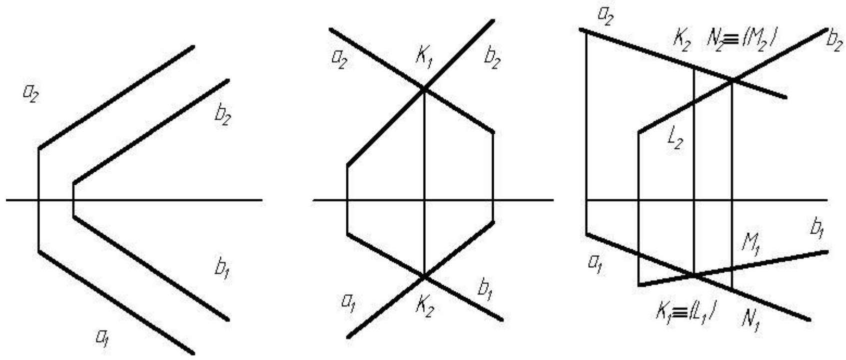
Задача широко применяется на практике, входит как фрагмент в решение многих задач.

10. Взаимное расположение прямых в пространстве.

А) *параллельные прямые*

Б) *пересекающиеся прямые* (точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи)

В) *скрещивающиеся прямые* (одноименные проекции скрещивающихся прямых пересекаются в точках не лежащих на одной линии связи. *Точки не совпадающие, но лежащие на одном проецирующем луче называются конкурирующими.* С их помощью определяется видимость элементов геометрических образов. (Прямая b ниже и дальше прямой a по отношению к наблюдателю).

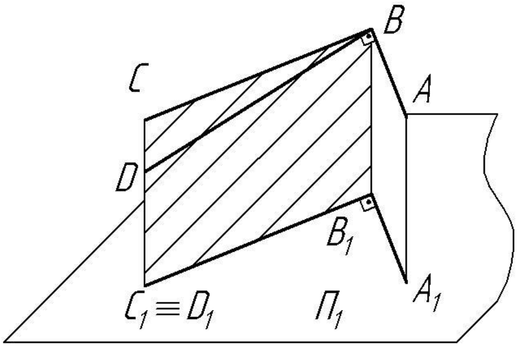


11. Основные свойства проекций плоских углов.

Теорема о проецировании прямого угла: *если одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, то прямой угол проецируется на эту плоскость без искажения.*

1. Если обе стороны угла параллельны плоскости проекций, то на нее угол проецируется без искажения.

2. Если одна сторона угла параллельна плоскости проекций, то проекция на эту плоскость будет угол того же типа (острый, тупой, прямой).



На основании этого с минимальным количеством графических построений решаются задачи по построению:
а) прямых $\perp$ друг другу
б) прямой $\perp$ плоскости
в) взаимно $\perp$ плоскостей.

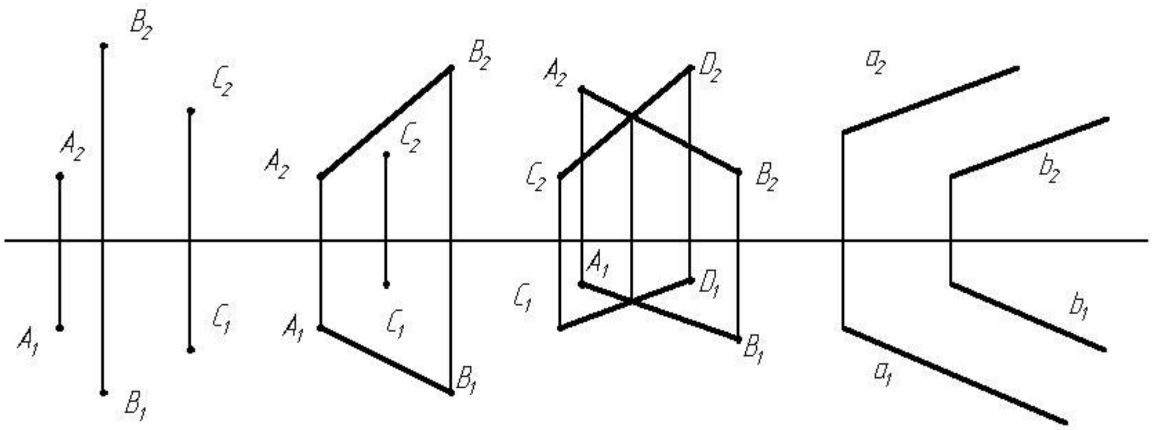
12. Плоскость.

Плоскость – это геометрическая фигура, которая может быть образована движением прямой или кривой линии по двум параллельным или пересекающимся прямым.

Способы задания:

Плоскость – геометрический образ, относящийся к классу поверхностей. Плоскость в пространстве определяется:

1. 3-мя точками не лежащими на одной прямой,
2. Прямой и точкой, взятой вне прямой,
3. Двумя пересекающимися прямыми,
4. Двумя параллельными прямыми,
5. Плоской фигурой.



Способы задания плоскости преобразуются из одного вида в другой.

Плоскость, перпендикулярная к плоскости проекций может быть задана прямой, по которой эти плоскости пересекаются друг с другом (следом).

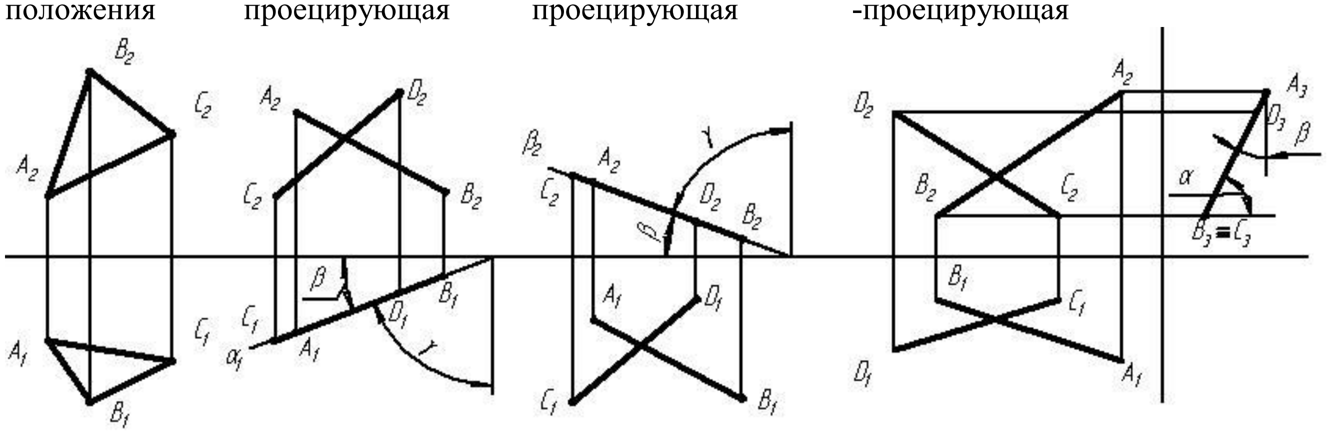
13. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.

А) *плоскость общего положения*, неперпендикулярна и непараллельна ни одной из плоскостей проекций.

Б) *проецирующая плоскость* – перпендикулярна одной из плоскостей проекций:

1. горизонтально-проецирующая $\perp \Pi_1$,
2. фронтально-проецирующая $\perp \Pi_2$,
3. профильно-проецирующая $\perp \Pi_3$.

общего положения | горизонтально-проецирующая | фронтально-проецирующая | профильно-проецирующая



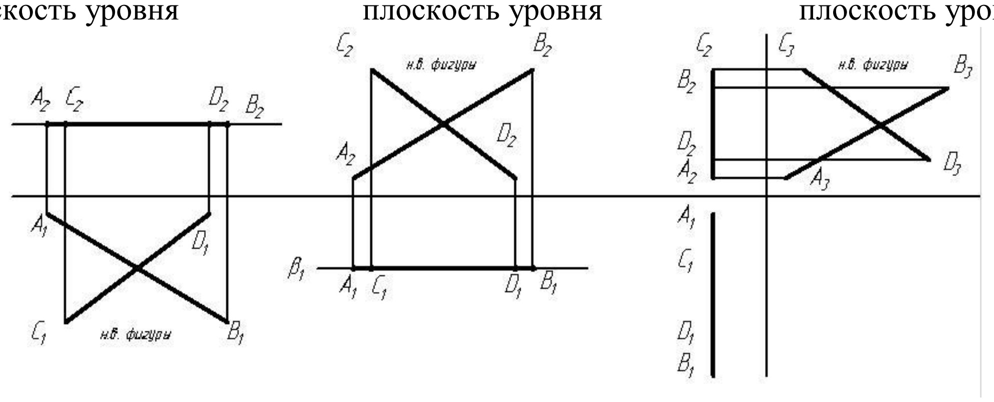
Проецирующая плоскость изображается в виде прямой линии на той плоскости проекций, перпендикулярно которой она расположена. Проекция плоскости – прямая линия обладает *собирательным свойством*: на эту прямую проецируются все точки и прямые, принадлежащие данной плоскости.

Ни на одной из плоскостей *нет натуральной величины отрезков и фигур*.

В) *плоскость уровня* (параллельна одной из плоскостей проекций, к двум другим плоскостям проекций плоскость уровня расположена перпендикулярно).

1. горизонтальная плоскость уровня,
2. фронтальная плоскость уровня,
3. профильная плоскость уровня.

горизонтальная плоскость уровня | фронтальная плоскость уровня | профильная плоскость уровня



На плоскостях проекций, перпендикулярно которым расположена плоскость уровня, она изображается в виде прямых линий, параллельных осям проекций; на плоскости проекции, параллельно которой расположена плоскость уровня, она изображается полем точек

Проекция плоскости уровня в виде прямой линии обладает *собирательным свойством.*

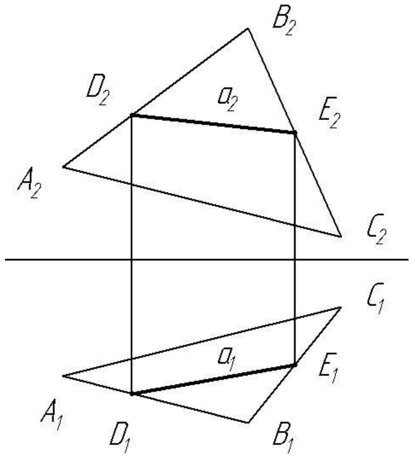
Геометрическая фигура, принадлежащая плоскости уровня, проецируются в натуральную величину на ту плоскость проекций, параллельно которой она расположена.

14. Принадлежность точки и прямой плоскости.

<u>*Прямая принадлежит плоскости*</u>:

А) Если она проходит через две точки, принадлежащие плоскости.

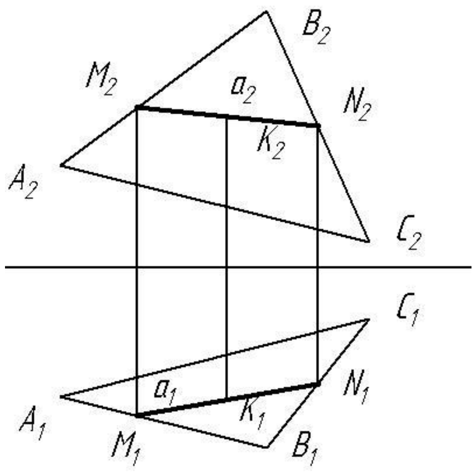
Б) Если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости и параллельна какой-либо прямой, принадлежащей данной плоскости.



Д, E $\in \alpha$
Д, E $\in$ a $\Rightarrow$ a$\in \alpha$

<u>*Точка принадлежит плоскости:*</u> если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Построение точки в данной плоскости сводится к двум операциям:

1. Построению в плоскости вспомогательной прямой
2. Построению точки на этой прямой



т. К $\in \alpha$ (ΔABC)
1. MN $\in \alpha$
2. K $\in$ MN

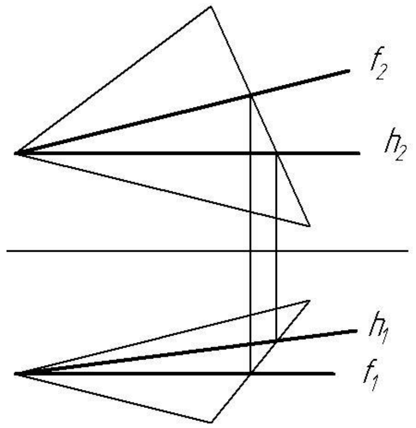
$\Downarrow$

K $\in \alpha$

15. Прямые особого положения в плоскости (главные линии плоскости).

Главные линии плоскости – это прямые, принадлежащие плоскости и занимающие особое положение по отношению к плоскостям проекций

К линиям особого положения в плоскости *относятся: горизонтали, фронтали, профильные прямые и линии наибольшего наклона*.

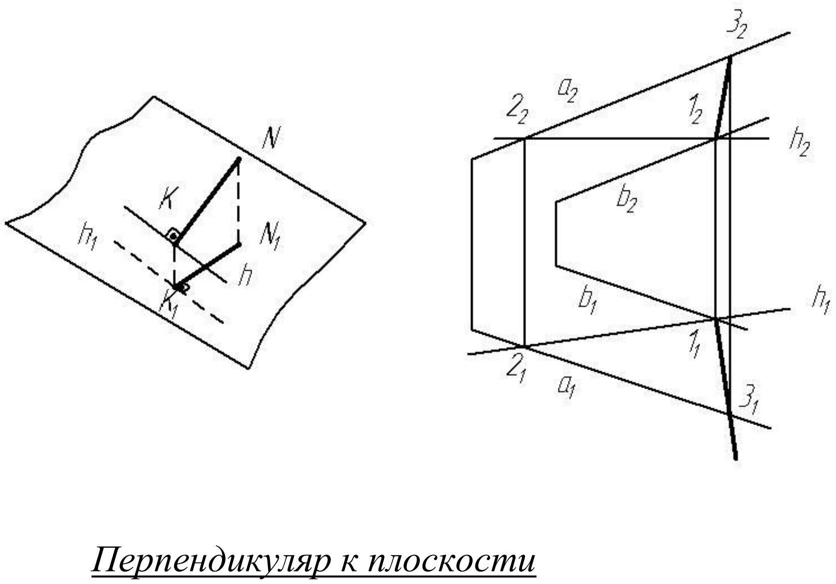


h – горизонталь в плоскости
f – фронталь в плоскости

H: 1. A_2, $H_2 \in \alpha$
2. $h \in \alpha$
F: 1. A_1, $F1 \in \alpha$
2. $f \in \alpha$

Линии наибольшего наклона плоскости – линии, лежащие в плоскости и перпендикулярные линиям уровня (h и f).

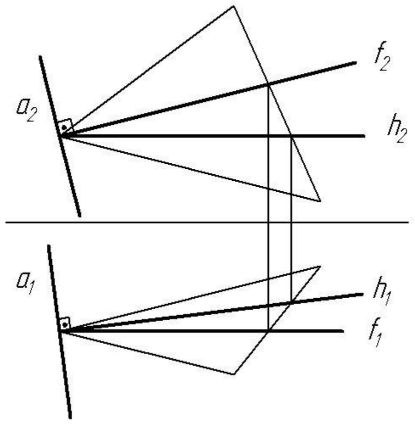
Линии наибольшего ската – линии лежащие в плоскости и перпендикулярные горизонталям.



1. $h \in \alpha$ (a ‖ b)
1,2 $\in \alpha$
2. $1_1, 3_1 \perp h_1$
3. $KN \in \alpha$
KN – линия наибольшего ската

Перпендикуляр к плоскости

Прямая, перпендикуляра плоскости если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.



В. Точке А провести прямую $a \perp \alpha$

1. $h \in \alpha$; $a_1 \perp h_1$

2. $f \in \alpha$; $a_2 \perp h_2$

$\Rightarrow a \perp \alpha$

16. Кривые линии.

Образование кривой лини.

Кривую линию можно представить себе как:

1. Множество последовательных положений точки – траектория движения точки.

2. Результат взаимного пересечения двух поверхностей.

3. Геометрическое место точек, отвечающих определенным условиям.

Классификация кривых линий.

1. а) *Плоские* – точки кривой принадлежат одной плоскости.

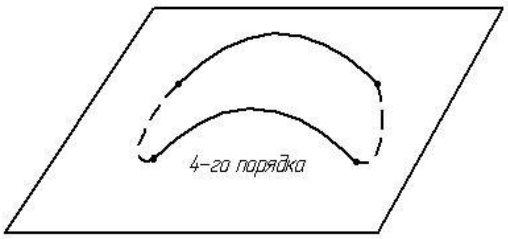
б) *Пространственные* – точки кривой не принадлежат одной линии

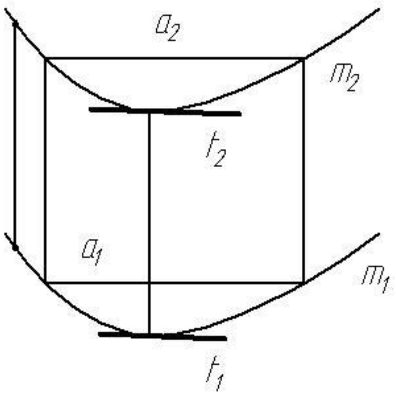
2. а) *Закономерные* – при образовании подчиняются какому-либо закону.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс

б) *Незакономерные* – задаются только графически.

Порядок кривой линии определяется *количеством точек пересечения с плоскостью общего положения.*





Некоторые свойства проекций кривых линий:

1. Если т. А принадлежит кривой, то ее проекция принадлежит соответствующим проекциям данной кривой

2. Секущая a и касательная t к кривой проецируются соответственно в секущую и касательную к проекциям кривой.

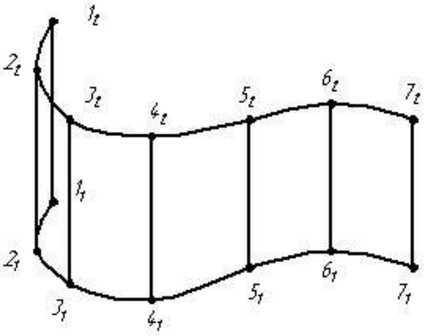
3. Проекция кривой некоторого порядка сохраняет тот же порядок (окружность – эллипс) или оказывается кривой более низкого порядка (окружность, перпендикулярная плоскости проекций – прямая).

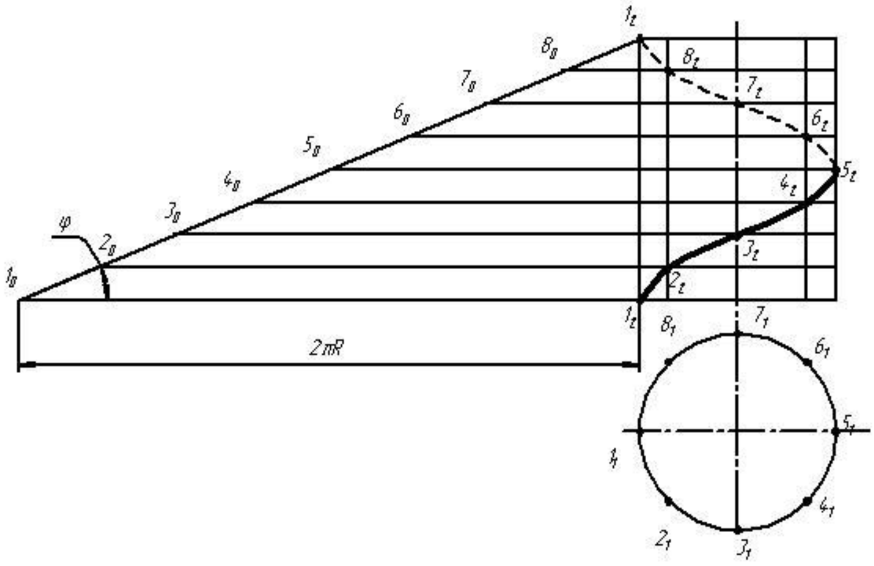
Задание кривых линий на чертеже

Кривые задаются проекциями ряда их точек.

Винтовые линии. Цилиндрическая винтовая линия (гелиса).

Острие карандаша прижимаем к цилиндру. Цилиндр вращаем вдоль оси цилиндра (движение равномерное). φ – угол подъема винтовой линии, P – шаг, R – радиус винтовой линии t=R*n – ход.





Аналогично образуется винтовая линия на конической поверхности.

17. Поверхности.

Образование и способы задания поверхностей на чертеже. Очерк поверхности.

Поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений линии «a», перемещающейся в пространстве по определенному закону.

Линию *a*, производящую поверхность, называют *<u>образующей</u>***.** При своем движении образующая может пересекать одну или несколько неподвижных линий *m, n*, называемых *<u>направляющими</u>*.

В процессе образования поверхности линия может быть неизменной или меняться по определенному закону (деформироваться, изгибаться).

Для наглядности изображения поверхности на чертеже закон перемещения линии «а» целесообразно задавать графически в виде семейства линий (m, l, n). Причем линию «а» называют образующей, l, m, n – направляющими.

<u>1. Кинематический способ:</u> Способ приводит нас к определению - *<u>определитель поверхности</u>* – совокупность независимых условий, однозначно определяющих поверхность.

Условие 1: геометрические образы (точки, линии, поверхности), с помощью которых может быть образована поверхность.

Условие 2: алгоритм формирования поверхности из геометрических фигур, входящих в состав определителя.

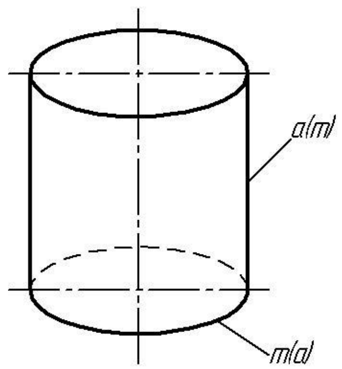
В определитель таким образом входят 2 части:

А) Совокупность геометрических фигур («г» - геометрическая часть).

Б) Дополнительные сведения о характере изменения формы образующей и законе ее перемещения («А» - алгоритмическая часть).

$$Ф\ (Г)\ [А].$$

Например прямой круговой цилиндр Ф (a, m)[A_1]



<u>2. Аналитический способ задания</u> – множество точек координаты, которых удовлетворяют математической зависимости.

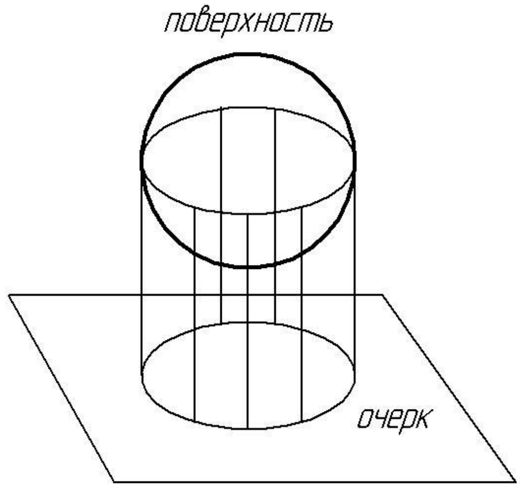
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ - эллипсоид

3. Задание с помощью обобщенного каркаса. Обобщенный каркас поверхности – произвольный набор линий и точек, принадлежащих поверхности.

В отличие от проекций точек и линий многие поверхности не могут быть заданы своими проекциями (плоскость безгранична и ее проекция – множество точек полностью покроют плоскости проекций).

Поэтому на чертежах показывают проекции некоторых точек и линий, входящих в состав определителя. Это не всегда наглядно и затрудняет чтение чертежа. Поэтому на чертежах часто указывают очерк (очертание) поверхности.

Очерком поверхности называют след на плоскости проекций проецирующей цилиндрической поверхности, которая огибает заданную поверхность.



Классификация поверхностей.

1. По форме образующей:

а) линейчатые – с прямолинейной образующей,

б) нелинейчатые – с криволинейной образующей.

2. В зависимости от вида направляющей:

а) кривыми, если направляющая кривая линия;

б) гранными, если направляющая ломаная линия.

3. По закону движения образующей:

а) поступательные,

б) вращательные,

в) винтовые,

г) по заданному направлению,

4. По признаку развертывания

а) развертываемые,

б) Неразвертываемые.

5. По закону образования:

а) закономерные,

б) незакономерные.

Следует помнить, что одна и та же поверхность может быть задана перемещением различных линий и согласно различным условиям, которым должна подчиняться в своем перемещении образующая.

Линейчатые развертываемые поверхности делятся на:

1. **Цилиндрические** (образуются путем параллельного переноса образующей). Подразделяются на:

а) по виду нормального сечения:

- эллиптический

-параболический

общего вида – нормальное сечение неопределенная геометрически линия

б) в зависимости от угла наклона оси к основанию.

-прямой,

-наклонный.

2. **Конические** (смежные образующие пересекаются.

а) по виду нормального сечения:

-эллиптический,

-параболический,

-общего вида.

в) в зависимости от угла наклона оси к основанию.

-прямой,

-наклонный.

3. **С ребром возврата**.

Поверхности образуются путем непрерывного движения прямолинейной образующей во всех своих положениях касающейся некоторой кривой.

К линейчатым развертывающимся поверхностям относятся:

Торс – поверхность, образованная в результате непрерывного движения прямолинейной образующей *a*, во всех своих положениях касающейся пространственной кривой *s* (ребро возврата) и пересекающей неподвижную кривую – направляющую *m*

Коническая поверхность является частным видом поверхности торса, у которой ребро возврата *S* собственная точка

Пирамидальная поверхность является частным видом конической поверхности, направляющая которой является ломаной линией.

Цилиндрическая поверхность является частным видом конической поверхности, у которой ребро возврата – точка *S,* удалена в бесконечность.

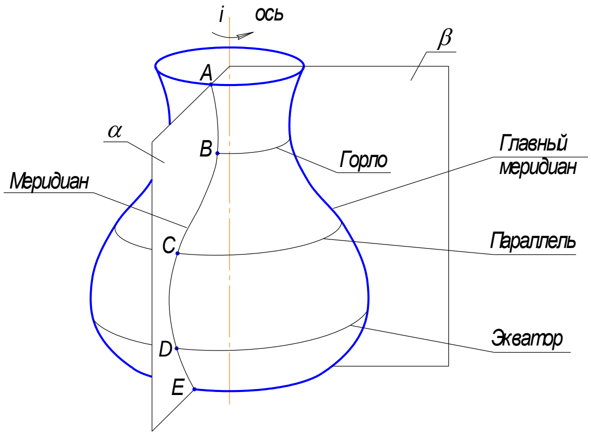
Призматическая поверхность – частный вид цилиндрической поверхности, направляющая которой является пространственной ломаной линией

Вид поверхности по форме образующей	Линейчатые		Нелинейчатые
Вид движения образующих	развертываемые	неразвертываемые	
поступательное	цилиндр общего вида		
вращательное	цилиндр, прямой круговой конус		сфера, параболоид, эллипсоид
винтовое		прямой или косой геликоид	
заданное направление	наклонный конус с ребром возврата	С плоскостью параллелизма (цилиндроид, коноид)	
		косая плоскость, однополостный гиперболоид	

Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением криволинейной или прямолинейной образующей вокруг неподвижной прямой – оси поверхности.

Каждая точка образующей при своем движении вокруг оси описывает окружность, которая называется *параллелью*. Плоскости этих окружностей распложены перпендикулярно оси. Параллель наибольшего радиуса называется *экватором*, наименьшего радиуса – *горлом* поверхности.



Плоскости, проходящие через ось вращения, называются меридианальными плоскостями (плоскости α и β на рис.). Линии поверхности, принадлежащие этим плоскостям, называются меридианами.

Меридиан, расположенный параллельно плоскости проекций, называется *главным меридианом*. Он проецируется без искажения на эту плоскость проекций.

Определитель поверхность вращения имеет вид:

Φ (a, i) [A],

где a - образующая поверхности;

i - ось вращения;

[A] - закон движения образующей α (вращение вокруг оси i).

Частные виды поверхностей вращения

Тор образуется при вращении окружности a (образующей) вокруг оси i, не проходящей через ее центр O.

Тор может быть: открытым (кольцо), если расстояние l от оси вращения до центра окружности больше радиуса R окружности, $l > R$ (рис. 72), и закрытым, если $l < R$

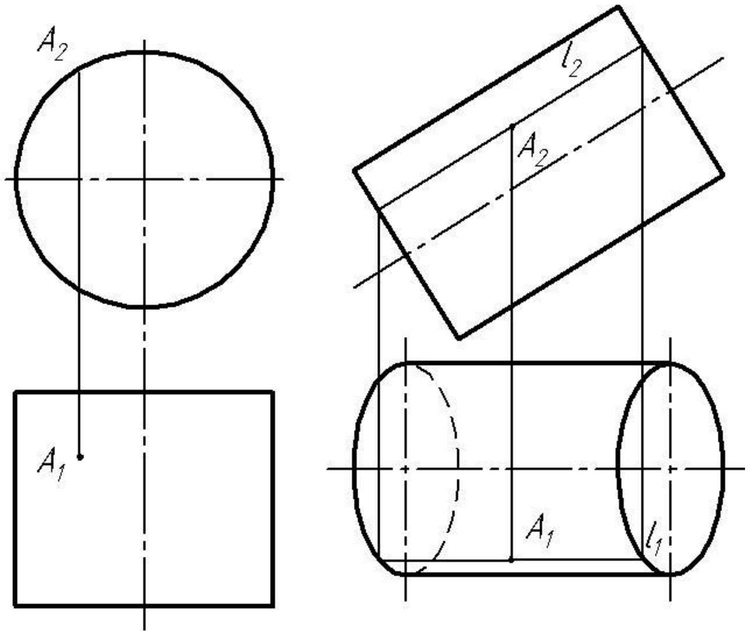
Сфера образуется вращением окружности вокруг своего диаметра. Сферу можно рассматривать как частный случай тора, у которого $l \in 0$ (центр окружности O принадлежит оси i)

Цилиндр образуется вращением прямолинейной образующей a вокруг оси i // a

Конус образуется вращением прямолинейной образующей *a*, пересекающей ось *í* вокруг этой оси *í* ∥ *a*

<u>17.1. Принадлежность точки поверхности.</u>

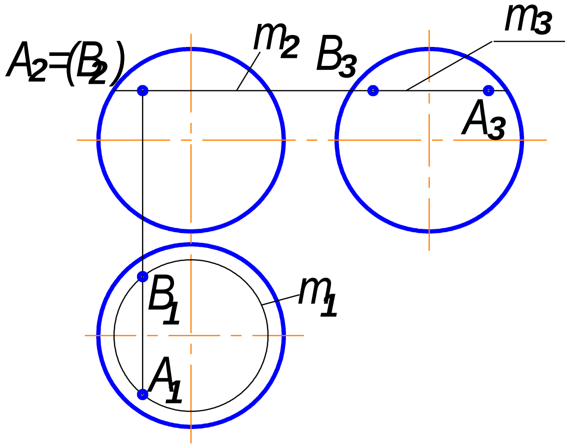
а) поверхность проецирующая. *Если точка находится на проецирующей поверхности,* то принадлежность точки поверхности определяется сразу *без дополнительных построений.*



б) поверхность общего положения. Точка принадлежит поверхности если она лежит на линии принадлежащей поверхности. (Требуется дополнительное построение линии, принадлежащей поверхности.

<u>Построение недостающих проекций точек, принадлежащих поверхности вращения,</u> производится на основе условия принадлежности.

В качестве вспомогательных линий целесообразно использовать окружности – параллели поверхностей.



18. Способы преобразования чертежа.

Во многих задачах в черчении приходится определять натуральную величину фигуры или ее элементов (сторон, углов, ребер и т.д.)

Известно, что если *фигура расположена параллельно какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину* и по проекции фигуры можно определить ее площадь, длины сторон, углы между ребрами, углы наклона прямых к плоскостям проекций, *т. е. решать разного рода метрические задачи.*

Возникает необходимость в применении таких *приемов, которые позволили бы переводить фигуры из общего положения в частное.*

Существует 2 способа достижения этой цели:

1. *Способ замены плоскостей проекций*. Сущность этого способа заключается в том, что *объект проецирования остается неизменным, а изменяют положение системы плоскостей проекций, причем каждая новая система плоскостей проекций должна быть ортогональной*.

2.Способ вращения. Положение плоскостей проекций остается неизменным, а новые проекции фигуры получают вращением ее вокруг специально выбранных осей.

В зависимости от характера вращения различают следующие способы:

а) вращение вокруг проецирующих осей (прямых),

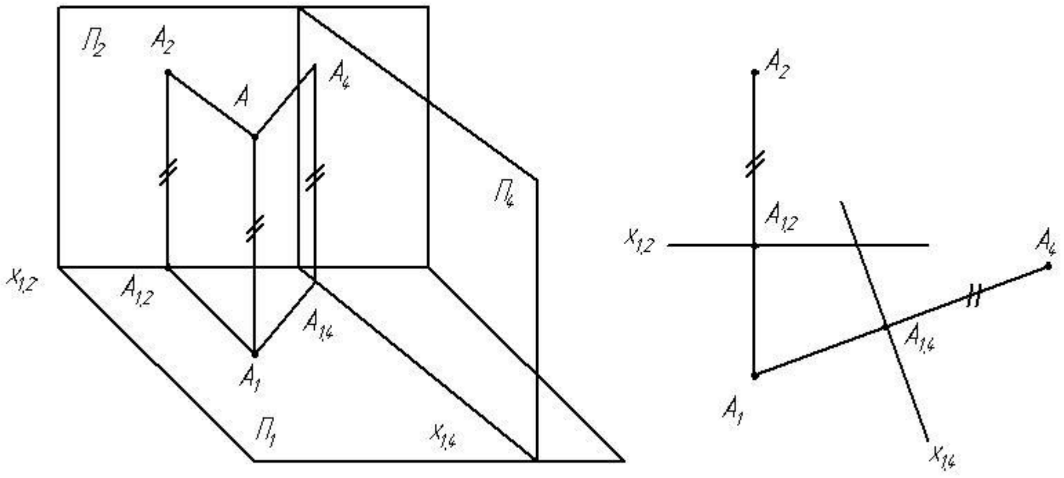
б) вращение вокруг линий уровня (способ совмещения),

в) способ плоско-параллельного перемещения.

Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций состоит в том, что одна из 2-х плоскостей проекций заменяется новой плоскостью, расположенной нужным образом относительно объекта и перпендикулярной к оставшейся плоскости проекций. Можно оставшуюся незамененной плоскость проекций заменить новой, перпендикулярной первой и т.д. Такое последовательное введение новых плоскостей проекций позволяет получить *соответствующим образом расположенную* *ортогональную систему плоскостей проекций*, относительно которой объект будет занимать удобное для решения задачи частное положение.

Пусть дана т. А и система 2-х плоскостей проекций $П_1 \perp П_2$. A_1 иA_2 проекции точки А на плоскости $П_1$ и $П_2$. Возьмем дополнительную плоскость $П_4 \perp П_1$ и спроецируем точку А на эту плоскость.



A_1 и A_4 – проекции точки А в новой системе плоскостей.

Получаем 2 системы плоскостей проекций основную и дополнительную. при переходе от одной плоскости проекций к другой видим, что расстояние от точки А до плоскости $П_1$ остается неизменным т.к. плоскость $П_1$ и точка А остаются неизменными.

Следовательно: $Ax_{12}A_2 = Ax_{14}A_4$, т.е. расстояние от заменяемой проекции до заменяемой оси равно расстоянию от новой проекции A_4 до новой оси x_{14}

Для перехода к чертежу (эпюру) плоскость $П_4$ повернем вокруг оси x_{14} до совмещения с $П_1$. Тогда новая фронтальная проекция A_4 точки А совместится с плоскостью $П_1$ и окажется на одной линии связи с горизонтальной проекцией A_1 (линия связи перпендикулярна оси x_{14}.

Правило: для построения на чертеже новой проекции точки при замене одной проекции другой надо:

1. Опустить перпендикуляр на новую ось из той проекции точки, которая не меняется.

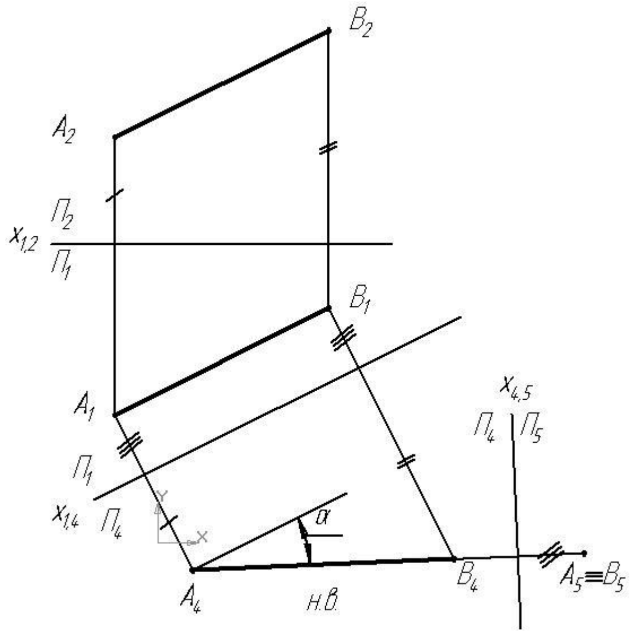
2. Отложить на нем расстояние, равное расстоянию от заменяемой проекции до заменяемой оси.

Зная построение на чертеже точек при замене плоскостей проекций можно построить проекции линий, фигур и т.д.

Способ замены плоскостей проекций упрощает решение ряда задач в графическом отношении (оси можно проводить на любом свободном месте).

19. Задачи, решаемые заменой плоскостей проекций (4 типа).

1. Прямую общего положения перевести в прямую уровня.



Одна замена плоскостей проекций.

$$\frac{П_1}{П_2} \to \frac{П_1}{П_4};\ AB \parallel П_4;\ x_2 \parallel A_1B_1$$

решаются задачи: по определению натуральных величин отрезка и углов наклона к плоскостям проекций.

2. Прямую общего положения перевести в проецирующую прямую.

Выполняются 2 замены. Решаются задачи: определение расстояний между двумя параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние от точки до прямой.

3. Плоскость общего положения перевести в проецирующее положение.

Пусть плоскость общего положения задана ΔABC. Для решения поставленной задач новую *плоскость проекций надо расположить перпендикулярно ΔABC и одной из плоскостей проекций*. Значит новая плоскость должна быть перпендикулярна линии пересечения заданной плоскости с одной из плоскостей проекций. При этом нет необходимости строить такую линию, т.к. ее направление можно установить с помощью главной линии в плоскости **горизонтали или фронтали.**

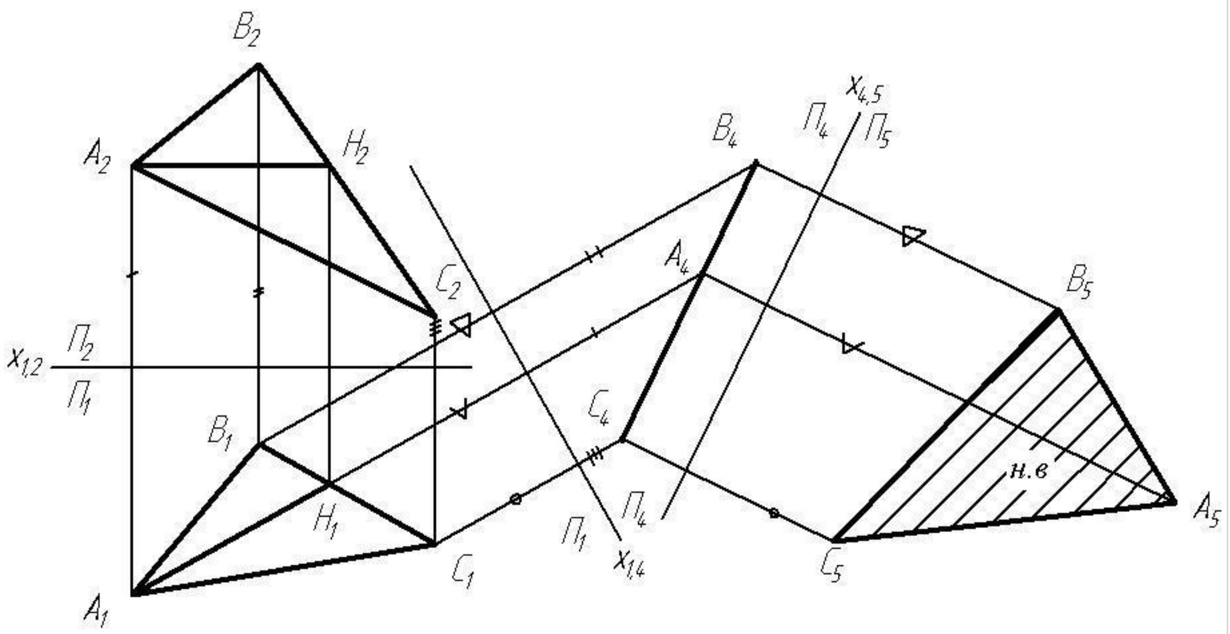
$П_4 \perp AH$ – выполняются сразу 2 условия, $П_4 \perp П_1$; $П_4 \perp \Delta ABC$.

Аналогично для фронтали.

4. Определение натуральной величины плоской фигуры (перевод плоскости общего положения в плоскость уровня).

Необходима плоскость параллельная плоскости фигуры.

Двойная замена плоскостей проекций. Первая замена плоскость *ΔABC* преобразуется в проецирующую. Вторая замена плоскость *ΔABC* преобразуется в плоскость параллельную $П_5$, т.е. определится натуральная величина фигуры.



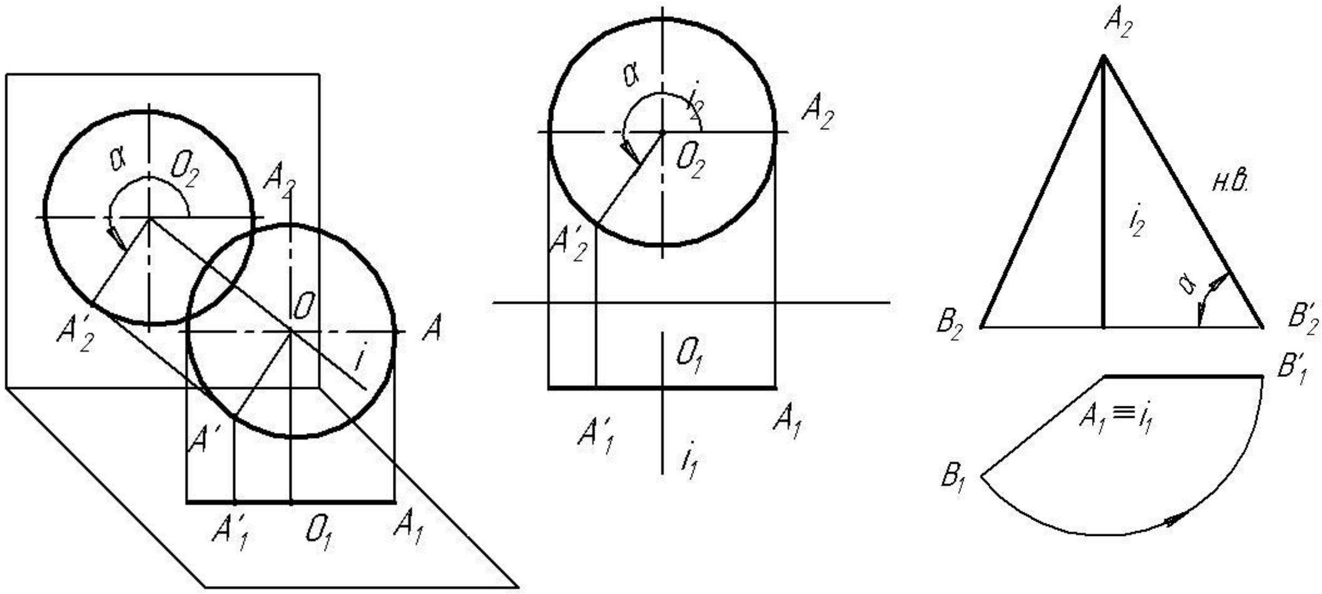
20. Способ вращения вокруг проецирующей прямой.

При вращении объекта относительно проецирующих плоскостей проекций, его проекции перемещаются по соответствующим плоскостям проекций.

Точка. Любая точка при вращении вокруг некоторой оси описывает окружность в плоскости перпендикулярной оси вращения. *При вращении точки вокруг проецирующей оси окружность проецируется на плоскость проекций в графически простые линии (окружность – прямая)*

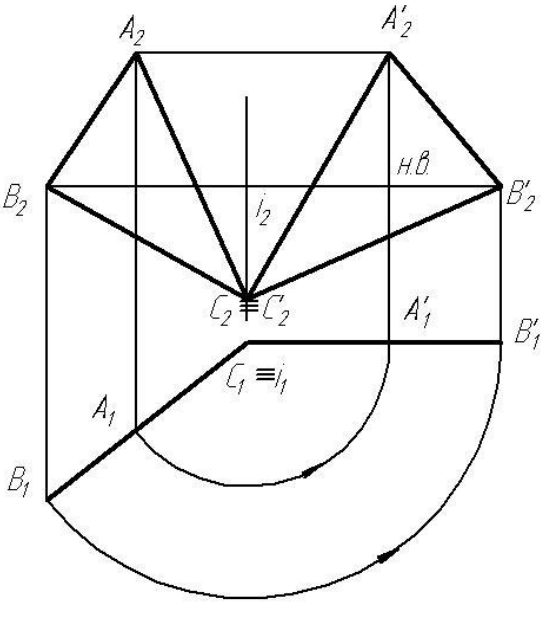
При вращении точки A вокруг фронтально-проецирующей оси i $\perp$ $П_2$ плоскость вращения $\parallel$ $П_2$. Точка вращается по окружности радиуса R = OA и без искажения спроецируется на $П_2$. На пл. $П_1$ окружность проецируется в виде отрезка прямой длиной 2R и $\perp$ оси вращения i_1.

Задачи решаемые вращением вокруг проецирующей прямой: определение натуральной величины отрезка прямой. Вращая отрезок AB вокруг горизонтально-проецирующей оси i можно привести его в положение *фронтальной линии уровня*, определив таким образом *натуральную величину отрезка AB и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций*. При этом ось вращения целесообразно провести через какую-либо точку вращаемого отрезка (например через один из его концов).



Тогда новое положение вращаемой прямой будет определяться двумя точками, одна из которых лежит на оси, и поэтому неподвижна. А другая вращается. В данном случае точка А – неподвижна (лежит на оси вращения), а положение отрезка определяется положением точки В.

Определение натуральной величины плоской фигуры.



Требуется определить н.в. ΔABC, лежащего в горизонтально-проецирующей плоскости.

Вращаем ΔABC вокруг оси $i \perp \Pi_1$ до положения $\parallel \Pi_2$.

Чтобы упростить построения ось i проводим через одну из вершин треугольника (например С).

Теперь она при вращении остается неподвижной. После поворота горизонтальная проекция треугольника займет положение $C_1A'_1B'_1 \parallel x$. Вершины треугольника A и B перемещаются в параллельных плоскостях γ и δ перпендикулярных оси i.

Фронтальные проекции после поворота займут положение A'_2 и B'_2.

$\Delta A'_2B'_2C'_2$ – н.в. ΔABC.

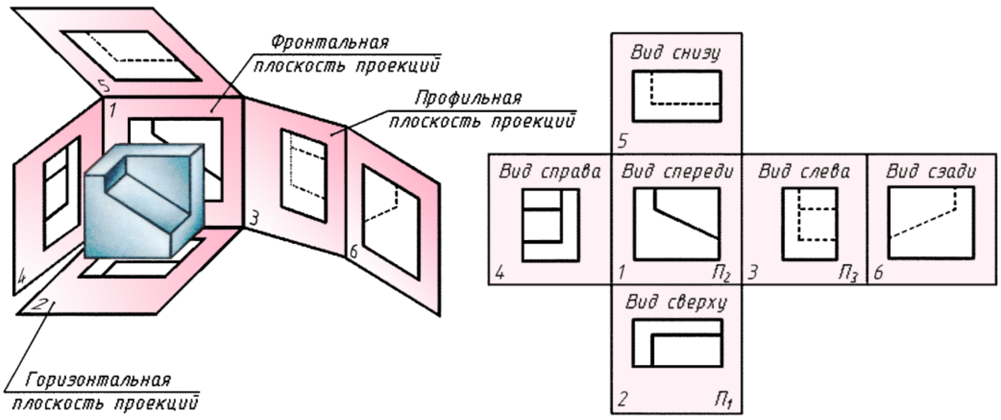
26.Изображения. Виды, разрезы, сечения, Выносные элементы

Изображения на чертежах в зависимости от их содержания разделяются на виды, разрезы, сечения, выносные элементы.

1. Видом называется изображение, обращенное к наблюдателю видимой части поверхности предмета.

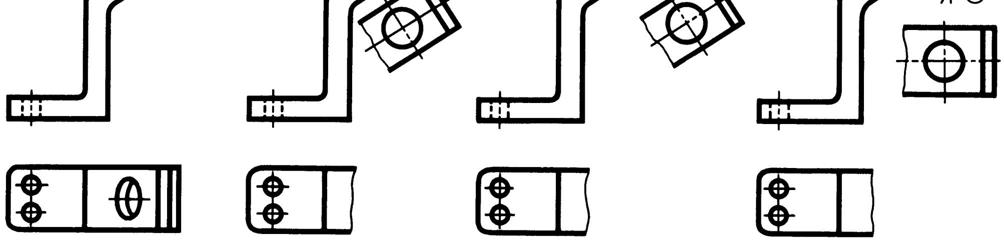
Существует 6 *основных видов*: главный вид (вид спереди) – дает наиболее полную информацию о детали, вид сверху, вид слева, вид снизу, вид справа, вид сзади.

Все изображения выполняются в проекционной связи. Количество изображений должно быть минимальным но достаточным. Обычно бывает достаточно 3 вида.

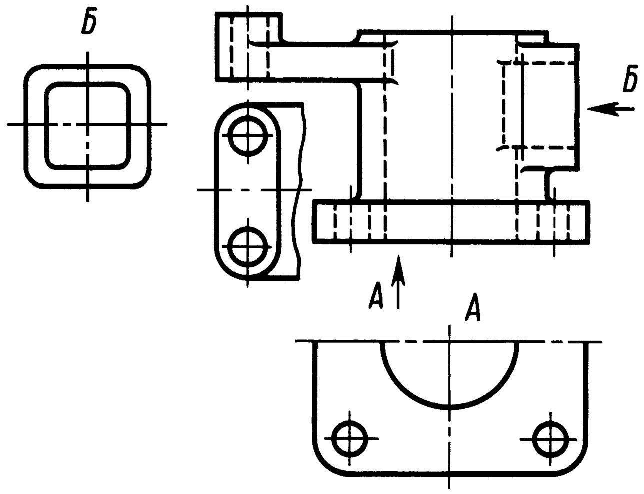


Кроме *основных* допускается применять дополнительные или местные виды.

- *дополнительный вид* – вид детали на плоскостях непараллельных основным плоскостям проекций. Применяют в тех случаях когда какую-либо часть предмета невозможно показать на основных видах без искажения формы и размеров.



- <u>*местный вид*</u> – вид ограниченной части поверхности детали на основных плоскостях проекций. (В качестве границы используется волнистая тонкая линия либо линия основного контура)



<u>*Обозначение видов*</u> – если изображения – виды находятся в непосредственной проекционной связи они на чертеже не обозначаются.

Если нарушена проекционная связь, виды обозначаются стрелкой направления взгляда и буквой русского алфавита в алфавитном порядке.

Над соответствующим изображением на чертеже выполняется надпись. Используют шрифт 7 или 10. Если изображение необходимо повернуть, то ставят знак «повернуто», иногда после него указывают угол поворота.

<u>*2. Разрезом*</u> называется изображение предмета мысленно рассеченного одной или несколькими плоскостями.

<u>*На разрезе показывается все что находится в секущей плоскости и за ней*</u>.

<u>*а) Разрезы различаются по положению секущей плоскости*</u>:

- *горизонтальные* (плоскость параллельна горизонтальной плоскости проекций)

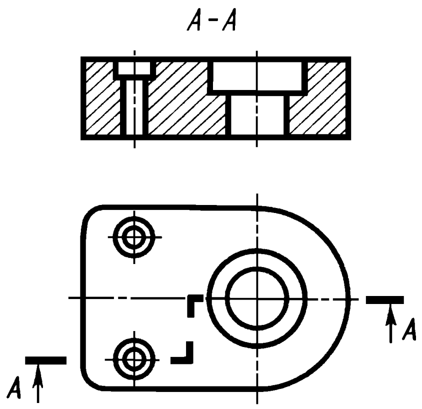
- *вертикальные* (секущая плоскость перпендикулярна п1) К ним относят фронтальные (сек. пл. ll п2) и профильные (сек. пл. ll п3)

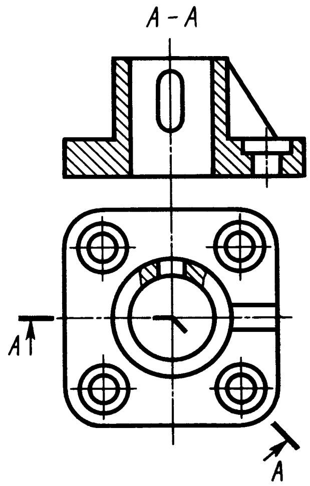
- *наклонные* (сек. пл. не параллельна и не перпендикулярна к п1)

<u>*б) По количеству секущих плоскостей разрезы бывают*</u>:

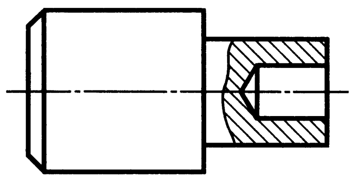
- *простые* – образованные одной секущей плоскостью;

- *сложные* – имеют 2 или более секущих плоскостей. К ним относят ломаные разреза (сек. пл. не параллельны друг другу) и ступенчатые (сек. пл. ll друг другу)





в) *<u>Местный разрез</u>* – разрез ограниченной части детали. Граница вида и разреза – тонкая волнистая линия. Местный разрез не обозначается.



<u>Соединение вида и разреза.</u> Для осесимметричных деталей допускается на одном изображении совмещать половину изображения «вид» с половиной изображения «разрез». Граница вида и разреза – штрихпунктирная линия (ось симметрии). Если на ось попадает ребро призматической поверхности, то для наружного ребра увеличивают изображение «вид» на 3..5 мм за ось. Граница вида и разреза – тонкая волнистая линия. Для внутреннего ребра аналогично увеличивают изображение «разрез».

*<u>Изображение разрезов</u>***.**

Разрезы рекомендуется выполнять на месте соответствующего вида (например фронтальный разрез на месте вида спереди).

Если при этом получится симметричное изображение, то следует соединять половину вида с половиной разреза. В этом случае для отделения вида от разреза используется *штрихпунктирная* линия (осевая).

Положение секущей плоскости на чертеже указывают разомкнутой линией. <u>*Длина штриха 8…30 мм, толщина 2S.*</u> На расстоянии **3…5** мм от наружного края указывают направление взгляда двумя стрелками и затем двумя заглавными буквами русского алфавита (шрифт 10 мм) обозначают секущую плоскость.

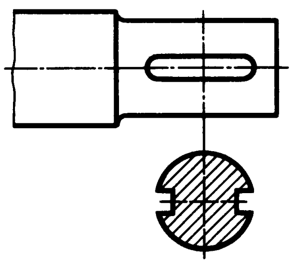
Знак ⟲ («повернуто») применяется, если изображение выполнено с поворотом относительно изображения, получаемого при проецировании.

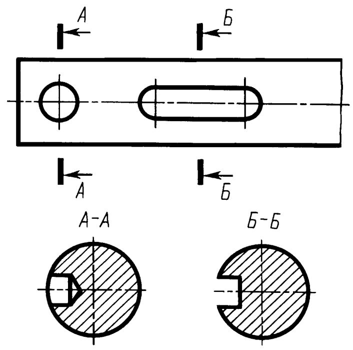
Простые разрезы не обозначаются если:

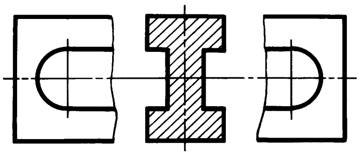
- СП совпадает с плоскостью симметрии предмета
- изображения расположены в проекционной связи

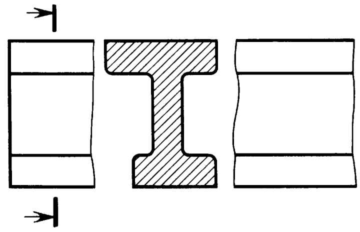
<u>*Сечением*</u> называется изображение предмета мысленно рассеченного одной или несколькими плоскостями. На изображении сечения показывают только то, что находится в секущей плоскости.

Вынесенные сечения располагаются вне изображения предмета. Они являются предпочтительными. Их допускается располагать в разрыве между частями одного и того же вида. Контур вынесенного сечения изображают сплошными толстыми основными линиями.

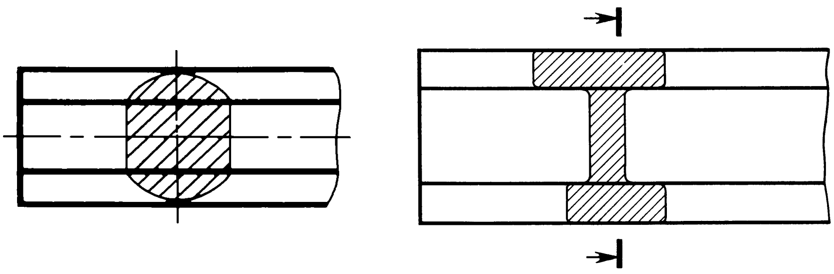




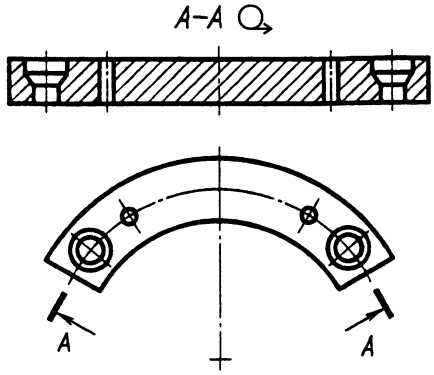




Наложенные сечения совмещаются с соответствующим видом предмета Контур наложенного сечения изображают сплошными тонкими линиями, причем контур изображения в месте расположения наложенного сечения не прерывают.



наложенные сечения



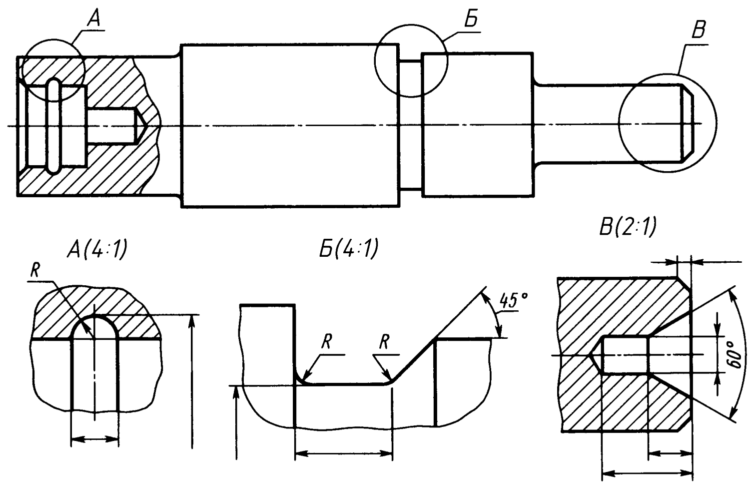
Развернутое сечение

<u>Выносной элемент</u> – дополнительное отдельное изображение (обычно увеличенное) какой-либо части предмета, требующей графического и других пояснений в отношении формы, размеров и иных данных.

Выносной элемент может содержать подробности, не указанные на соответствующем изображении, и может отличаться от него по содержанию (например, изображение может быть видом, а выносной элемент – разрезом).

Изображаемое на выносном элементе место предмета отмечают на виде, разрезе или сечении замкнутой сплошной тонкой линией (окружностью или овалом) с обозначением буквой русского алфавита на полке линии-выноски. Над выносным элементом указывается та же буква и масштаб, в котором выполнен выносной элемент.

Выносной элемент следует изображать как можно ближе к соответствующему месту изображения предмета.



21. Классификация задач начертательной геометрии.

Круг задач, которые решаются графическим путем, чрезвычайно широк. При этом независимо от сложности их решения все они могут быть отнесены к одному из двух классов.

1. *Метрические* – задачи на определение натуральных величин длин отрезков, углов, площадей.

2. *Позиционные* – задачи по определению *принадлежности элементов* (точка, линия) другому геометрическому элементу (линии, поверхности), а также общих элементов (пересечения), принадлежащих различным геометрическим элементам.

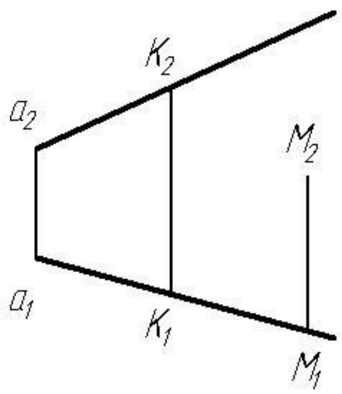
<table>
<tr><td colspan="3">Позиционные задачи</td><td rowspan="3">Метрические задачи</td></tr>
<tr><td rowspan="2">На принадлежность</td><td colspan="2">На пересечение (главные задачи)</td></tr>
<tr><td>1-я позиционная задача</td><td>2-я позиционная задача</td></tr>
<tr><td>1. Точки, прямой
2. Точки плоскости
3. Точки поверхности
4. Прямой – плоскости
5. Линии – поверхности</td><td>1. Пересечение плоскостей (метод плоских посредников)
2. Пересечение поверхности плоскостью (метод плоских посредников)
3. Пересечение поверхностей:
а) метод плоских посредников
б) метод сферических посредников</td><td>1. Пересечение прямой с плоскостью (метод плоских посредников)
2. Пересечение прямой с поверхностью (метод плоских посредников)
3. Пересечение кривой линии с поверхностью</td><td>Определение:
1. расстояний
2. углов
3. площадей
4. длин отрезков.</td></tr>
</table>

В 1-ой позиционной задаче строится *линия пересечения*

Во 2-ой позиционной задаче определяются *точки пересечения*.

22. Позиционные задачи на взаимную принадлежность.

1. Принадлежность точки прямой.



Точка может находиться на прямой или вне её.

$K \in a$

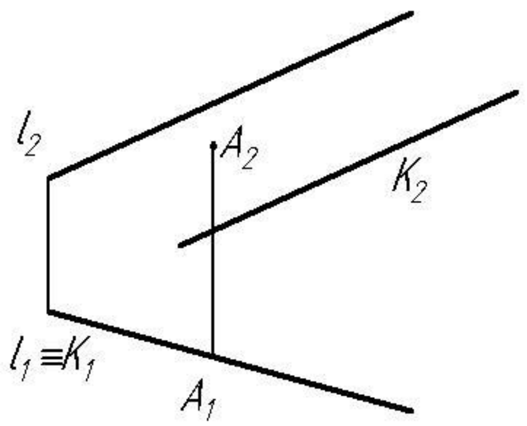
$M \notin a$

$K \in a \Leftrightarrow (K_1 \in a_1)(K_2 \in a_2)$

Если точка принадлежит прямой, то ее проекции находятся на одноименных проекциях данной прямой.

2. Принадлежность точки плоскости.

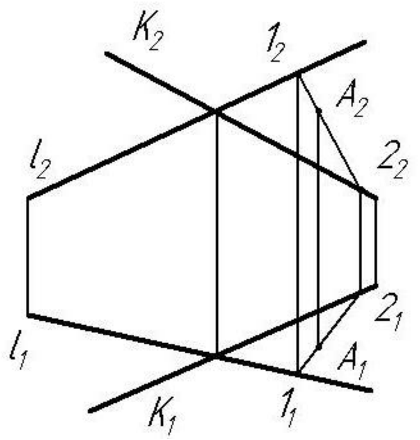
а) плоскость проецирующая.



Если точка находится в проецирующей плоскости, то принадлежность точки плоскости определяется сразу без дополнительных построений.

$$\alpha(K \parallel l) \perp \Pi_1 . A \in \alpha$$

б) плоскость занимает общее положение.

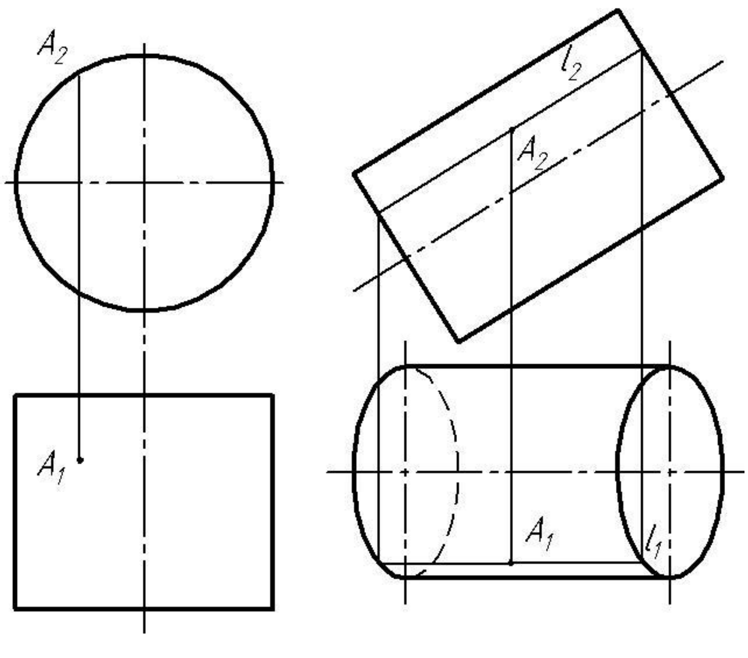


Точка принадлежит плоскости общего положения если ее проекции принадлежат проекциям прямой, лежащей в этой плоскости.

Требуется дополнительное построение прямой, лежащей в плоскости.

3. Принадлежность точки поверхности.

а) поверхность проецирующая. *Если точка находится на проецирующей поверхности,* то принадлежность точки поверхности определяется сразу *без дополнительных построений.*



б) поверхность общего положения. Точка принадлежит поверхности если она лежит на линии принадлежащей поверхности. (Требуется дополнительное построение линии, принадлежащей поверхности.

4. Принадлежность прямой плоскости.

а) прямая и плоскость - проецирующие. Дополнительных построений не требуется.

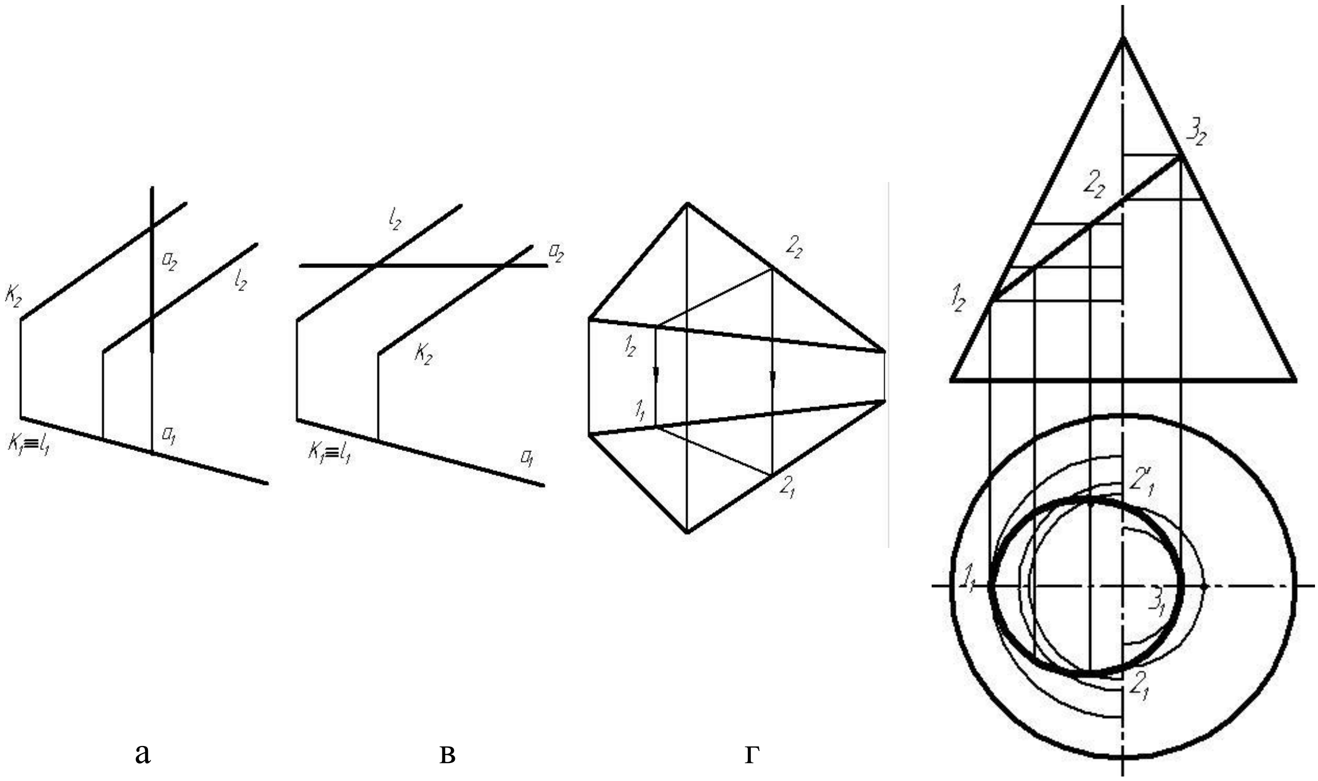
б) проецирующая прямая не может лежать в плоскости общего положения.

в) плоскость проецирующая. Дополнительных построений не требуется.

г) оба геометрических элемента занимают общее положение. Прямая принадлежит плоскости если:

- параллельна прямой, лежащей в плоскости, и проходит через точку принадлежащую плоскости,

- проходит через две точки, принадлежащие плоскости.



а в г

5. Принадлежность линии поверхности

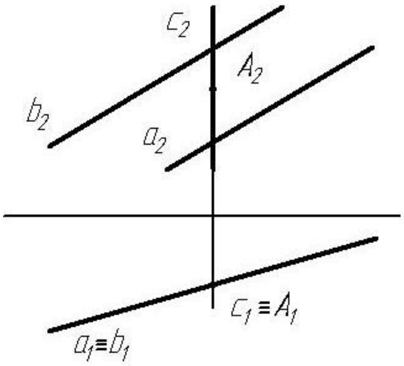
Линия – множество точек. Следовательно, линия принадлежит поверхности, если все ее точки принадлежат поверхности.

23. Позиционные задачи на пересечение.

1. Оба геометрических элемента занимают проецирующее положение.

а) прямая и плоскость (дополнительных построений не требуется).

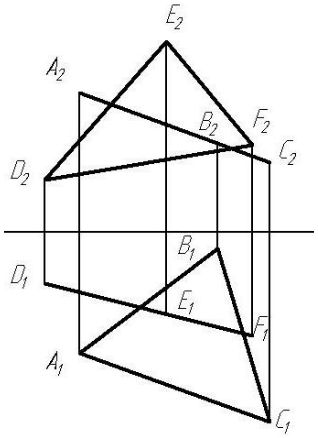
б) две плоскости (дополнительных построений не требуется).



$\alpha(a \parallel b) \perp \Pi_1$

$c \perp \Pi_2$

$A = \alpha \cap c$



$\alpha(\Delta ABC) \perp \Pi_2$

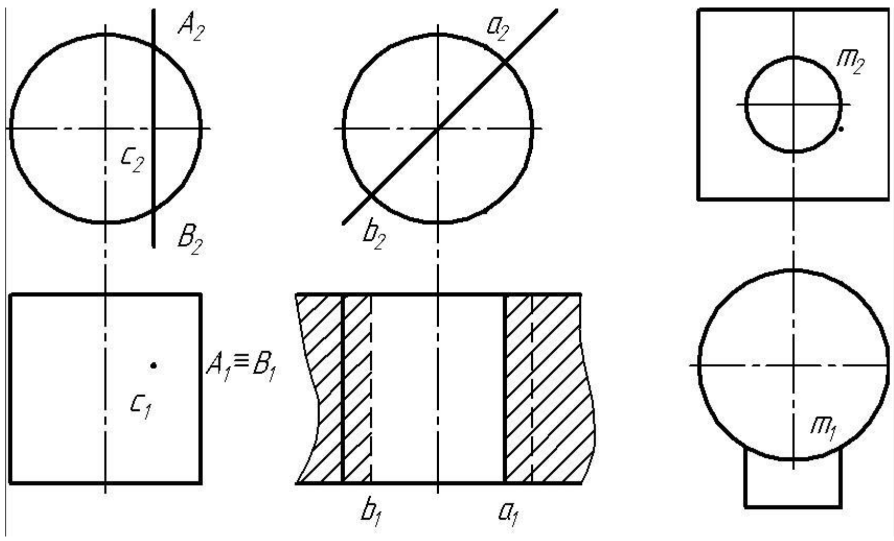
$\beta(\Delta DEF) \perp \Pi_1$

$l = \alpha \cap \beta$

в) прямая и поверхность. A, B = c$\cap$ цилиндрическую поверхность. (Дополнительных построений не требуется)

г) плоскость и поверхность $\alpha\cap$ поверхность цилиндра, $\alpha\cap\beta=a$, b. (Видимость).

д) две поверхности. Два проецирующих цилиндра. $\alpha\cap\beta = m$ (доп. построений не требуется).



Общая методика решения задач на пересечение когда оба геометрических элемента занимают проецирующее положение..

Проекции проецирующих прямых, плоскостей, на плоскости которым они перпендикулярны обладают собирательным свойством: *проекции точек и прямых линий лежат на этих проекциях.*

Поэтому, когда оба геометрических элемента занимают проецирующее положение, то проекции точек и линий пересечения даны на чертеже, следовательно, дополнительных построений не требуется.

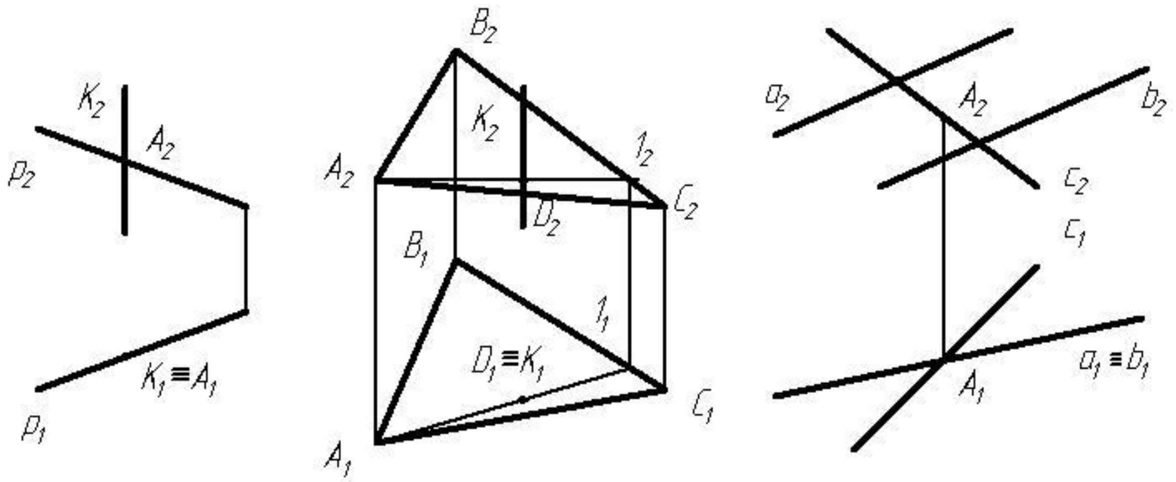
2. Один элемент занимает проецирующее положение.

а) две прямые $K \perp \Pi_1$, $A = p \cap k$.

б) прямая и плоскость:

- прямая проецирующая $D = \alpha(\Delta ABC) \cap k$, $k \perp \Pi_1$. проекция K_1 прямой к обладает собирательным свойством. $D \in A_1 \Leftrightarrow A \in \alpha$.

-плоскость проецирующая $A = \alpha(a \parallel b) \cap c$; $\alpha \perp \Pi_1$. Проекция $\alpha_1(a_1 \equiv b_1)$ обладает собирательным свойством. $A_1 = \alpha_1 \cap c_1$; $A_2 \in c_2$. Дополнительных построений не требуется.



в) плоскость и поверхность.

-*сечения конуса*. В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конуса могут быть получены такие фигуры:

* плоскость перпендикулярна оси – окружность;

* плоскость пересекает образующую – полный или усеченный эллипс;

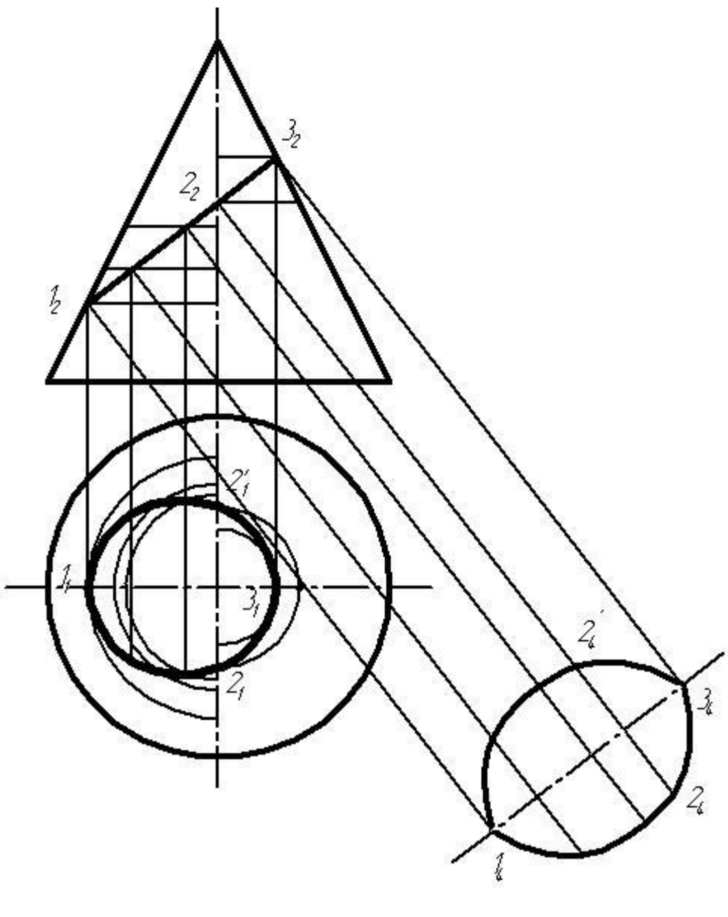
* плоскость параллельна оси – гипербола;

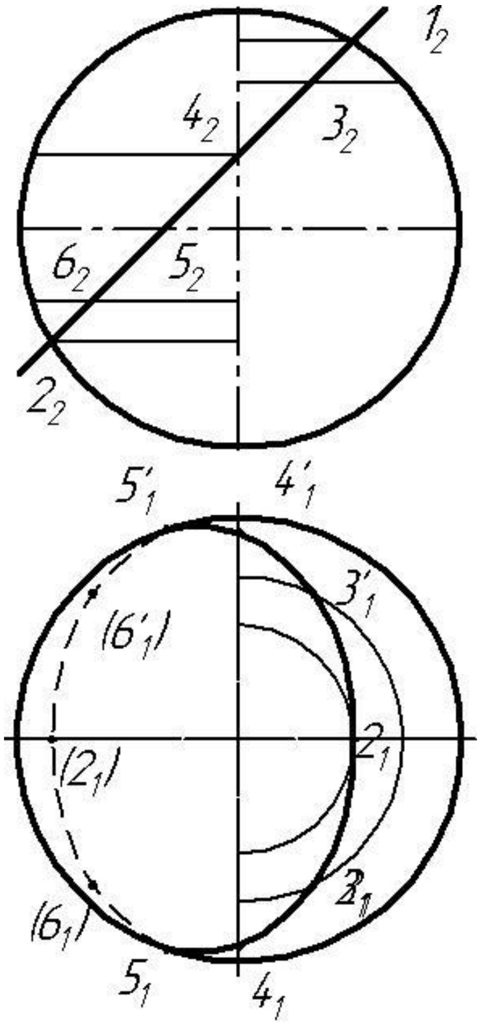
* плоскость, параллельна образующей – гипербола;

* плоскость параллельна оси и проходит через вершину – треугольник.

Рассмотрим построение сечения прямого кругового конуса фронтально-проецирующей плоскостью, пересекающей все его образующие.

В основе построения точек линии пересечения – принадлежность их линиям поверхности и плоскости. Построенное сечение может быть получено *методом вспомогательных секущих плоскостей*. *Истинный вид сечения построен методом замены плоскостей проекций. Если дана плоскость общего положения, то ее переводят в проецирующее положение.*





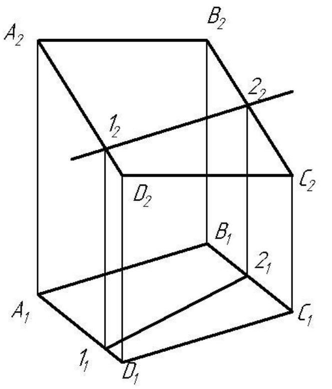
- *сечения сферы*. В сечении сферы – окружность. При выполнении построений используются простые линии – окружности, принадлежащие поверхности. $m=\alpha\cap\beta$/

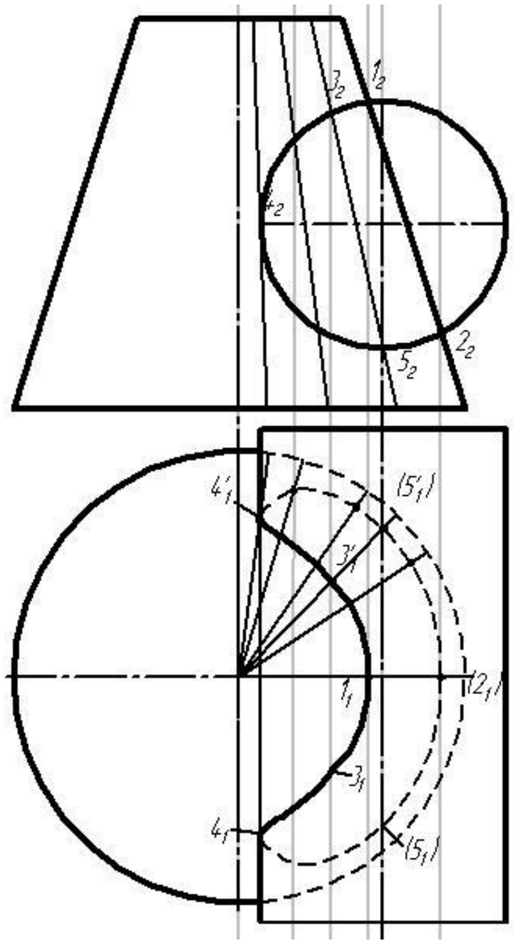
- *сечения цилиндра – самостоятельно.*

г) Две плоскости. Дано $\alpha\perp\Pi_2$, β (ΔABC). Найти $l=\alpha\cap\beta$.

Решение: 1). $\alpha_2\cap\beta_2=1_2 2_2$; 2) $1_1\in A_1D_1$, $2_1\in B_1C_1$; 3) $\alpha\cap\beta=12$

д) Две поверхности. Дано: цилиндр, перпендикулярный Π_2 и усеченный конус, ось которого перпендикулярна Π_1. Найти: $l=\alpha\cap\beta$. Решение: 1) $\alpha_2\cap\beta_2=1_2 2_2$; 2) 1 и 2 опорные точки; 3) 4 - границы видимости; Точки находятся с помощью образующих конуса.





Когда один из элементов занимает проецирующее положение, то задача решается просто т.к. нет необходимости выполнять дополнительные построения.

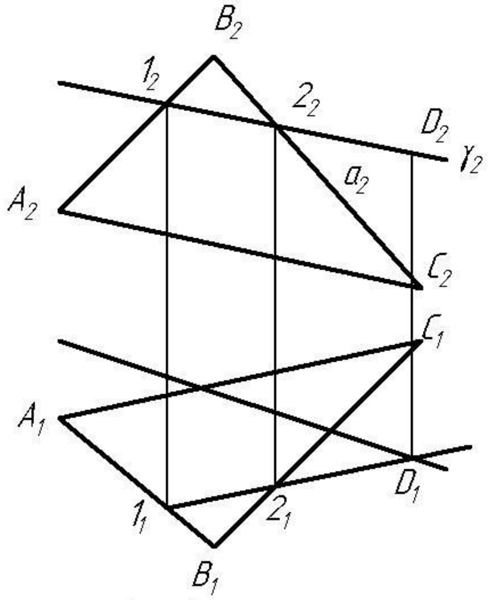
Одна из проекций дана (точка или линия пересечения). Построение недостающей проекции – без дополнительных вспомогательных построений проецирующих элементов.

Решение позиционных задач 2-ой группы на пересечение, когда оба геометрических элемента занимают проецирующее положение.

1. Взаимное положение прямой и плоскости.

а) пересечение прямой и плоскости.

б) параллельность прямой и плоскости. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости. Для решения вопроса о параллельности пользуются проецирующими плоскостями, заключая в них рассматриваемые прямые линии и изучая полученные проекции линий пересечения двух плоскостей и заданных прямых на эпюрах.

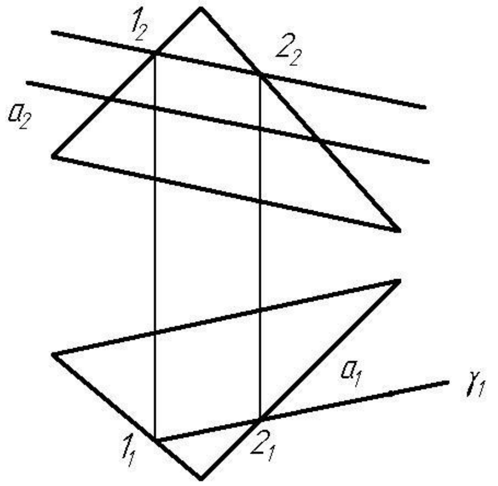


Дано α(ΔABC) и прямая a.

Найти m=a∩α

Решение. Решение осуществляется путем введения вспомогательной плоскости. $\gamma\perp\Pi_2$; $a\in\gamma$.

1. $\gamma_2 \equiv a_2$
2. $\gamma_2 \cap \alpha_2 = 1_2 2_2 \Rightarrow 1_1 2_1$
3. $1_1 2_1 \cap a_1 = D_1$
4. D_2



<u>Задача:</u> определить параллельна ли прямая плоскости α(ΔABC)?

<u>Решение:</u>

1. $\gamma\perp\Pi_1$, $a\in\gamma$ ($a_1 \equiv \gamma_1$)
2. $\gamma\cap\alpha = 1,2$

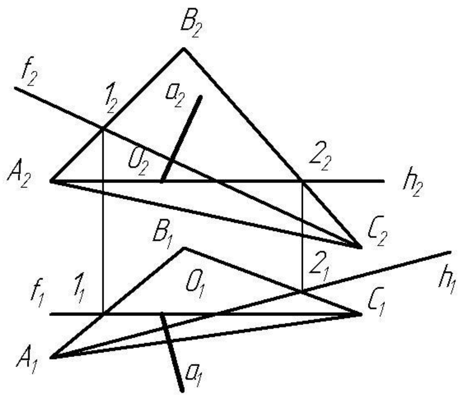
   $\gamma_1 \cap \alpha_1 = 1_1 2_1$
3. $\gamma_2 \cap \alpha_2 = 1_2 2_2$

   $1_2 2_2 \parallel a_2$ – прямая параллельна плоскости

в) перпендикулярность прямой плоскости.

Теорема о перпендикуляре к плоскости: если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция этой прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали.

Следствие: прямая перпендикулярна плоскости если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.



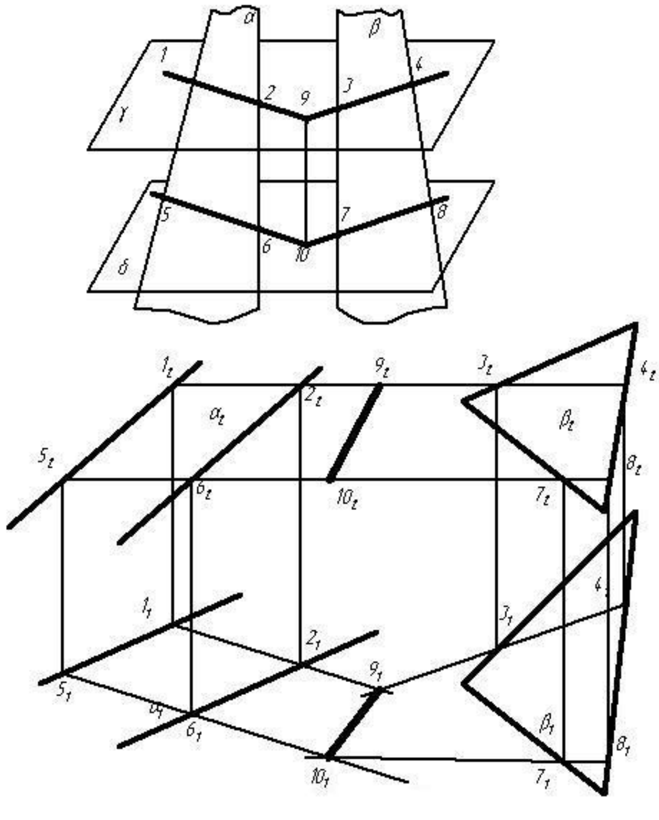
1. $h \in \alpha$
2. $f \in \alpha$
3. $h \cap f = O$; $h_1 \cap f_1 = O_1$; $h_2 \cap f_2 = O_2$;
4. $a_2 \perp f_2$

$\Rightarrow$ $a \perp \alpha$

$a_1 \perp h_1$

Решение позиционных задач 1-ой группы на пересечение, когда оба геометрических элемента занимают общее положение.

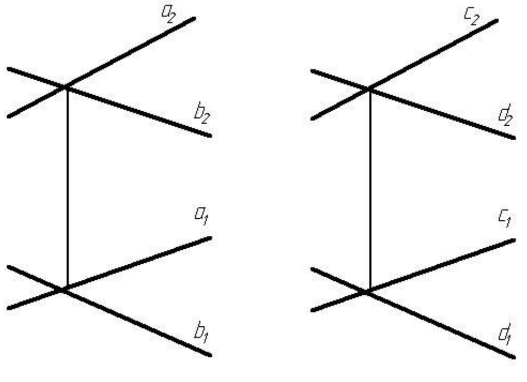
1. Две плоскости. При задании двух плоскостей общего положения построить линию пересечения без дополнительных построений невозможно. Для проведения этой линии нужны две точки, принадлежащие этой линии. Каждую из них находят используя искусственный прием: обе плоскости пересекают плоскостями-посредниками. Построение выполнять легче, если в качестве посредников использовать плоскости уровня.



1. $\gamma \cap \alpha = 1,2$
2. $\gamma \cap \beta = 3,4$
3. $1,2,3,4 \in \gamma$; $12 \cap 34 = 9$
4. $\delta \cap \alpha = 5,6$
5. $\delta \cap \beta$ 7,8
6. 5,6,,7,8 $\in \delta$; $56 \cap 78 = 10$
7. 9,10 – искомая линия.

Использованный метод посредников (его идея) будет применяться для решения более сложных поверхностей.

2. Параллельность 2-х плоскостей. Плоскости параллельны если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости.



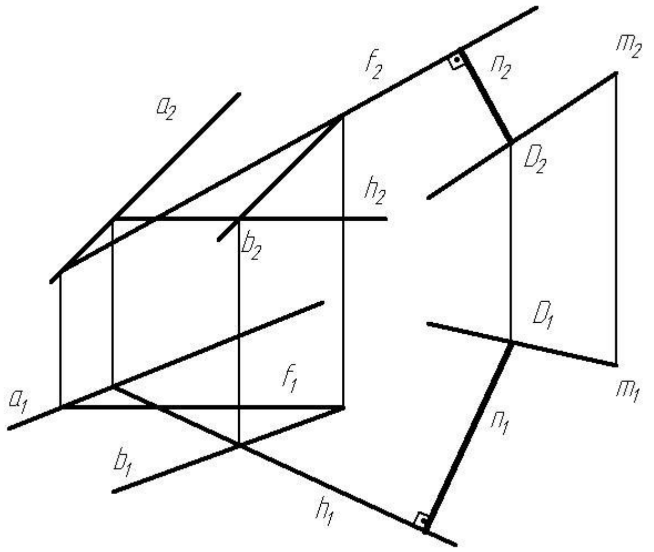
$\alpha\ (a \cap b),\ \beta\ (c \cap d)$,

$a \parallel c$

$\Rightarrow \quad \alpha \parallel \beta$

$b \parallel d$

3. Перпендикулярность 2-х плоскостей. Плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит перпендикуляр к другой.



Дано: плоскость *a*, заданная параллельными прямыми (a‖b), прямая m.

Найти: $\beta \perp \alpha$?

Решение: 1. $h \in \alpha$

2. $f \in \alpha$

3. $n_1 \perp h_1$; $n_1 \cap m_1 = D_1$

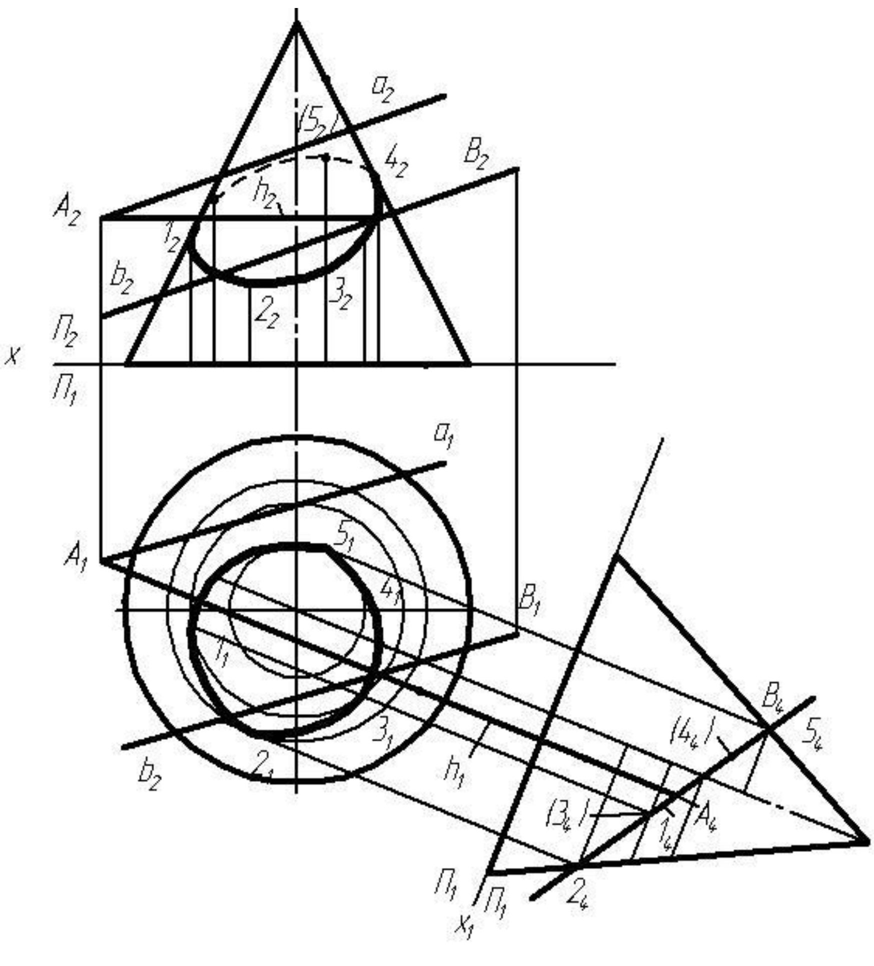
4. $n_2 \cap f_2$; $n_2 \cap m_2 = D_2$

5. $\beta(m \cap n) \perp \alpha(a \| b)$

4. Поверхность и плоскость.

При задании секущей плоскости общего положения является целесообразным перевод ее в проецирующее положение (1-ый этап).

На втором этапе применяется метод секущих плоскостей (вспомогательная плоскость и заданная пересекаются по прямым).



Найти линию пересечения поверхности α (конус) с плоскостью β.

1. $\frac{П_2}{П_1} \Rightarrow \frac{П_4}{П_1}$,

2. 1,2,3,4,5,

3. Видимость (граница видимости точки 1, 4)

4. Соединяем плавной кривой.

Пересечение геометрических элементов, занимающих общее положение.

1. Общая схема решения задачи на пересечение поверхностей.

Задача на пересечение поверхностей встречается в технике очень часто. Детали машин представляют собой сочетания простых геометрических форм. При выполнении чертежей возникает необходимость построения линии пересечения этих поверхностей.

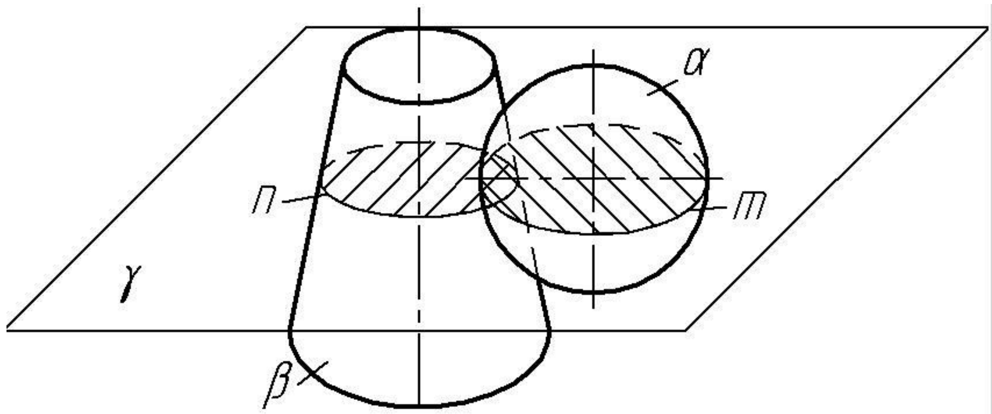
Для определения линий пересечения 2-х поверхностей находят ряд точек, принадлежащих обеим поверхностям и соединяя их плавной кривой линией получают линию пересечения поверхностей. Линия пересечения может быть как плоской, так и пространственной кривой.

Для нахождения точек, принадлежащих линии пересечения используют *способ вспомогательных секущих плоскостей (способ посредников)* сущность которого заключается в следующем:

а) заданные поверхности пересекаются третьей вспомогательной поверхностью (посредником).

б) определяется линия пересечения посредника с каждой из заданных поверхностей в отдельности.

в) находят общие точки полученных линий, которые и принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.



В качестве вспомогательных поверхностей обычно используются плоскости и сферы. При выборе посредника следует исходить из того чтобы он в пересечении с заданными поверхностями образовывал *графически простые линии – прямые или окружности* и в проекциях на плоскости проекций графически простые линии.

У линий пересечения двух поверхностей различают *точки опорные и случайные.*

В первую очередь определяют опорные точки (высшую и низшую, крайнюю правую и левую, точки границы видимости). Определение опорных точек позволяет определить, в каких пределах расположены проекции линии пересечения.

Проекции линии пересечения всегда располагаются в пределах площади наложения, т.е. общей площади одноименных проекций пересекающихся поверхностей.

Характер линии пересечения зависит от поверхностей:

- многогранники пересекаются по одной линии или 2-м замкнутым пространственным ломаным линиям

- многогранник и тело вращения – в пересечении одна или две линии 2-го порядка, сходящихся на ребрах.

- две кривые поверхности второго порядка – в пересечении одна или 2 пространственные кривые как правило 4-го порядка, которые в отдельных случаях распадаются на кривые 2-го порядка или даже прямые.

<u>Построение линии пересечения поверхностей с помощью плоских посредников.</u>

<u>1. Две поверхности.</u>

Область применения: поверхности должны занимать частное относительно плоскостей проекций положение, в пересечении с плоскостями-посредниками должны получаться графически простые линии.

Рассмотрим пересечение конуса и цилиндра, оси которых горизонтально-проецирующая и фронтально-проецирующая прямые.

В данном случае в качестве плоскостей-посредников использованы горизонтальные плоскости уровня. Они пересекают конус по окружностям, а цилиндр по направляющим – прямым, т.е. по простым линиям.

Этап 2 – выявление опорных точек.

Точки 1 и 2 лежат на очерковой образующей конуса на фронтальной плоскости $П_2$. Их горизонтальная проекция находится на линии, совпадающей с горизонтальной осью конуса. Плоскость δ пересекает конес по окружности радиуса R.

Эта же плоскость касается поверхности цилиндра по образующей. В пересечении окружности R_1 и образующей цилиндра находятся горизонтальные проекции 3_1 и 4_1 точек пересечения конуса и цилиндра.

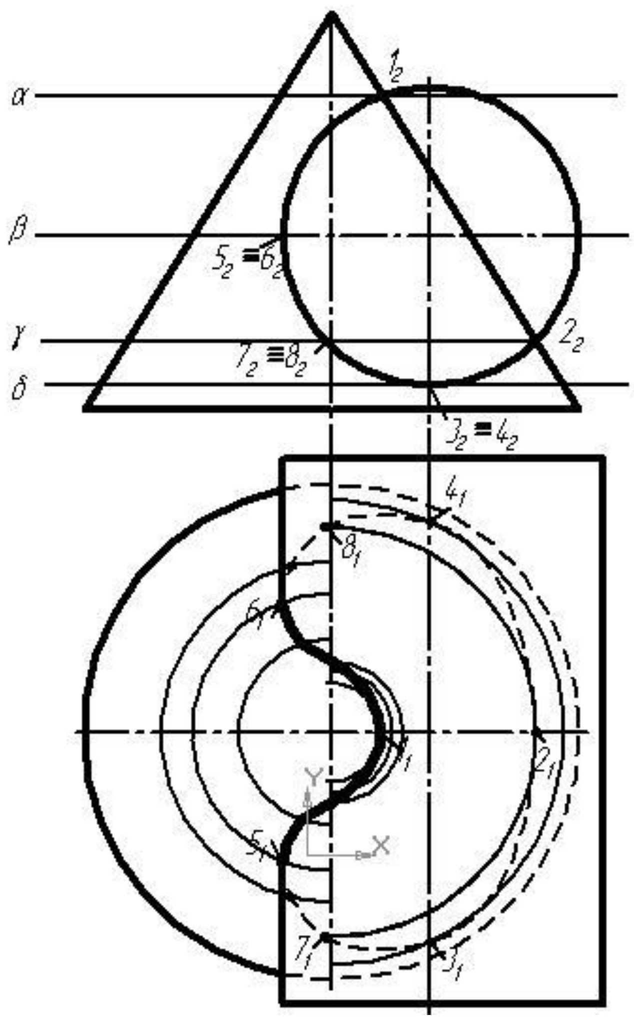
Точки 1 и 3, 4 – наивысшая и низшая точки линии пересечения. Они определяют интервал, в котором необходимо проводить секущие плоскости для определения промежуточных (случайных) точек.

Этап 3. Построение случайных точек линии перехода 5,6, и т.д. проводим плоскости α, β, γ.

Затем полученные проекции точек линии пересечения обводят плавной кривой линией. В рассмотренном примере построена лишь горизонтальная проекция линии пересечения поверхностей.

Фронтальная проекция этой линии совпадает с фронтальной проекцией цилиндра.

Видимость. Линия видима, если видимы обе поверхности, образующие ее. Если хоть одна из поверхностей невидима, то линия пересечения невидима.



<u>Построение лини пересечения поверхностей при помощи шаровых (сферических) посредников.</u>

<u>Условия применения:</u>

1. обе поверхности – поверхности вращения.

2. оси их пересекают или параллельны одной из плоскостей проекций.

Только при этих условиях можно построить сферические поверхности, соосные одновременно обеим поверхностям вращения. Центр этих поверхностей должен находиться в точке пересечения осей данных поверхностей.

Общий принцип построения.

Каждая сфера-посредник пересечет каждую из поверхностей по окружностям, принадлежащим этой сфере, а на выбранной сфере-посреднике окружностью одной поверхности с окружностью другой поверхности даст искомые точки пересечения двух данных поверхностей. При последовательном применении ряда сфер-посредников получают достаточное количество точек линии перехода.

Рассмотрим на конкретном чертеже линии перехода 2-х поверхностей вращения.

1. 2 конуса (поверхности вращения).

2. оси вращения их пересекаются и параллельны плоскости $П_2$.

Если оси пересекаются, но не параллельны плоскостям проекций, то их можно перевести в нужное положение относительно плоскостей способом замены плоскостей проекций.

Этап 1. Нахождение опорных точек без использования сфер-посредников. Контурные очерковые образующие поверхностей конусов лежат в одной плоскости $\alpha \parallel П_2$, следовательно они пересекаются в точках 1, 2 (строится сначала на $П_2$).

Этап 2. Остальные точки находятся с помощью концентрических шаровых посредников с общим центром в точке О пересечения осей конусов.

Посредники – сферы являются соосными поверхностями относительно заданных поверхностей конусов, а значит пересекаются с каждым конусом по окружностям, плоскости которых перпендикулярны $П_2$ (проецируются на $П_2$ в виде прямых).

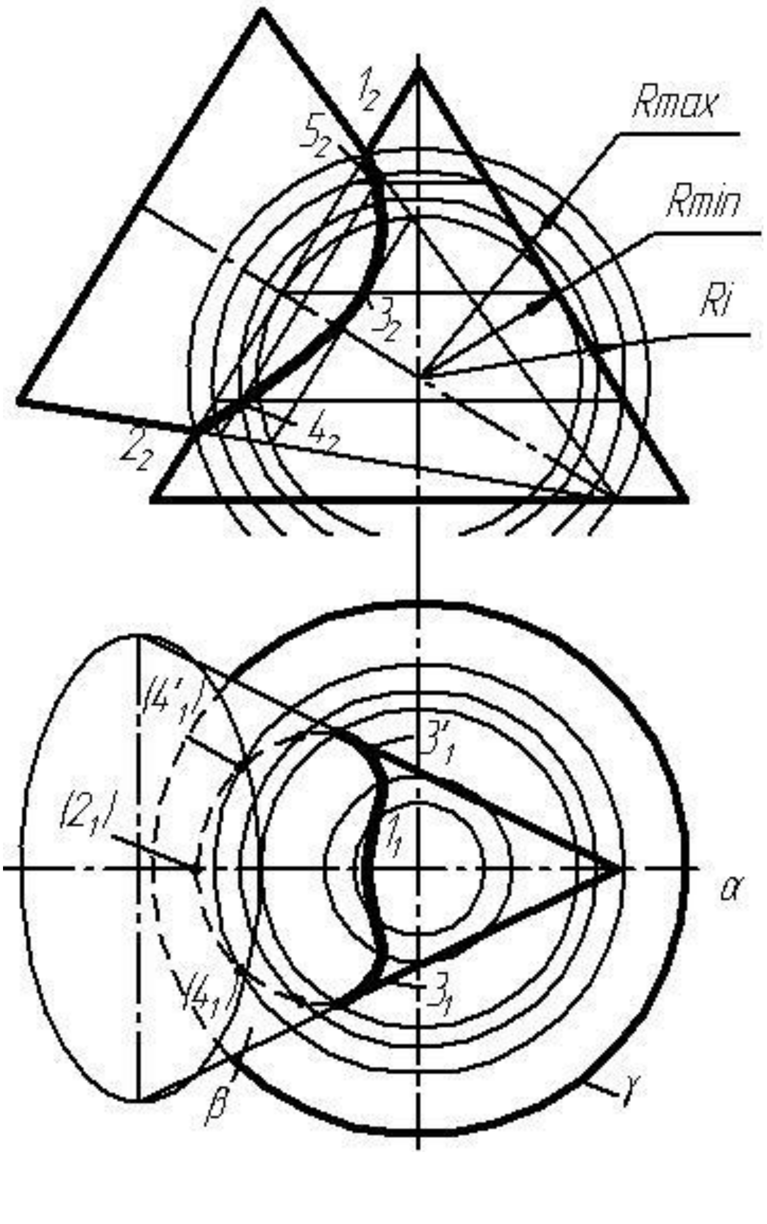
Прежде всего, находим 2 крайних сферических посредника, позволяющих найти опорные точки. Остальные сферы будут располагаться между ними.

Сфера минимального радиуса R_{min} равен наибольшему из перпендикуляров, опущенных из O_2 на очерковые образующие конусов (т.е. сфера-посредник касается одной поверхности и пересекает другую или касается обоих при равенстве размеров).

$$\left.\begin{aligned} R_i \cap \gamma = a \\ R_i \cap \beta = b \end{aligned}\right\} a \cap b = 3.4$$

R_{max} – через наиболее удаленную точку пересечения очерковых образующих.

Этап 3. Нахождение промежуточных точек (выполняется аналогично). Соединяем и определяем видимость линии.



Частные случаи пересечения поверхностей 2-го порядка.

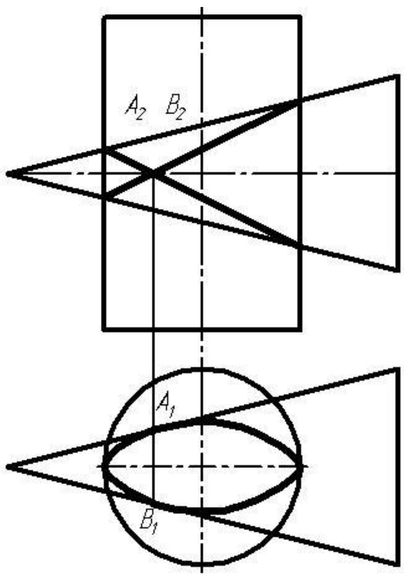
1. Теорема о двойном прикосновении. Если 2 поверхности 2-го порядка имеют касание в 2-х точках, то линия их пересечения распадается на 2 кривые 2-го порядка, плоскость которых проходит через прямую, соединяющую точки касания.

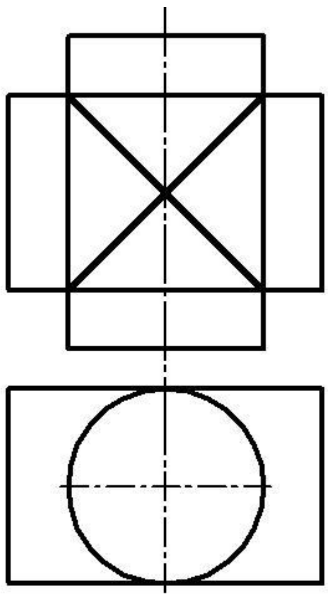
2. Теорема Монжа. Если 2 поверхности 2-го порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым.

Примером могут быть 2 цилиндрические поверхности одинакового диаметра, оси которых пересекаются между собой. Оба цилиндра описаны вокруг сферической поверхности.

Линиями пересечения цилиндрических поверхностей будут два эллипса, которые на плоскость Π_2 проецируются в отрезки прямых, расположенных по биссектрисам углов, между проекциями осей цилиндров.

3. Если две кривые поверхности пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и по второй плоской кривой.





24. Аксонометрические изображения.

1. Сущность метода и основные понятия.

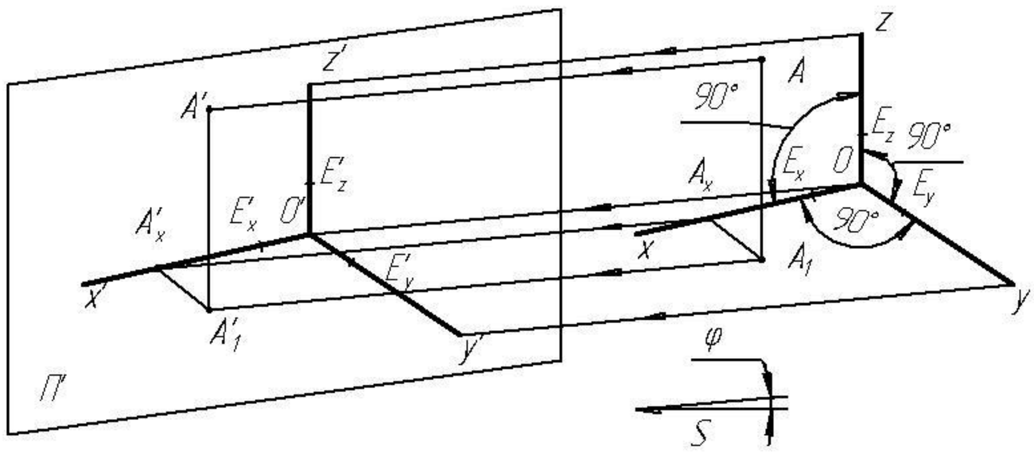
Аксонометрические изображения широко применяются на практике благодаря хорошей наглядности и простоте измерений. В проектно-конструкторской документации аксонометрические изображения с успехом используются для улучшения ориентации в сложных пространственных системах трубопроводов, изучения создаваемого объекта с позиций эстетики (отдельно или как дополнение к комплексному чертежу).

«Аксонометрия» - по гречески – измерение по осям.

Сущность метода параллельного аксонометрического проецирования заключается в том, что данную геометрическую фигуру относят к некоторой системе координат (декартовых, прямоугольных) а затем проецируют параллельными лучами на плоскость вместе с координатной системой.

Следовательно, аксонометрическое изображение есть прежде всего проекция, только на одну плоскость, а не на 2 и более, как это имело место в системе ортогональных плоскостей.

Точка A, отнесенная к системе прямоугольных координат OXYZ, проецируется вместе с системой по направлению S на плоскость П' – плоскость аксонометрических проекций (картинную плоскость).



OX, OY, OZ – оси координат в пространстве.

O'X', O'Y', O'Z' – их проекции на П' (аксонометрические оси).

Возьмем произвольный отрезок *L* (OE_x=OE_y=OE_z=*l*) и примем его за «1» (натуральный масштаб по осям).

Проекции отрезка на аксонометрических осях: l'_x=$O'E'_x$; l'_y=$O'E'_y$; l'_z=$O'E'_z$ ($l'_x \neq l'_y \neq l'_z \neq l$). Эти отрезки являются единицами измерений по аксонометрическим осям – аксонометрическими масштабами.

Отношения $\frac{l'_x}{l}, \frac{l'_y}{l}, \frac{l'_z}{l}$ - коэффициенты искажения (показатели искажения по аксонометрическим осям. Координаты искажения по оси O'X' – "u"; O'Y' – "v"; O'Z' – "w".

Трехзвенная ломаная линия OA_xA_1A спроецировалась в плоскую ломаную линию $O'A'_xA'_1A$. Точка A' называется аксонометрической проекцией точки A. Точка A'_1 – аксонометрическая проекция точки A_1, которая уже является ортогональной проекцией точки A и называется вторичной проекцией точки A.

Отношения между отрезками пространственной ломаной линии и ее плоской проекции выражаются теми же коэффициентами искажения.

$$\frac{A'_x A'_1}{A_x A_1} = \frac{l_y}{l} = v; \qquad \frac{A'_1 A'}{A_1 A} = \frac{l_z}{l} = w; \qquad \frac{O' A'_x}{OA_x} = \frac{l'_x}{l} = u;$$

Каждый из отрезков пространственной ломаной линии определяет одну из прямоугольных координат точки A. Таким образом можно перейти от прямоугольных координат к аксонометрическим и наоборот.

$$x'=ux; \qquad y'=vy; \qquad z'=wz$$

где x', y', z' – отрезки, определяющие аксонометрические координаты точки; x, y, z – отрезки, определяющие прямоугольные координаты точки.

В практике построения аксонометрических проекций обычно пользуются не самими коэффициентами искажения, а некоторыми величинами, пропорциональными им и называемыми <u>*приведенными коэффициентами искажения*</u>.

$$U:V:W=u:v:w$$

Задаваясь ими можно взять их так, чтобы наибольший был равен 1. Это упрощает построение.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции могут быть:

- <u>*изометрическими*</u>, если показатели искажения по всем трем осям равны между собой: u=v=w,

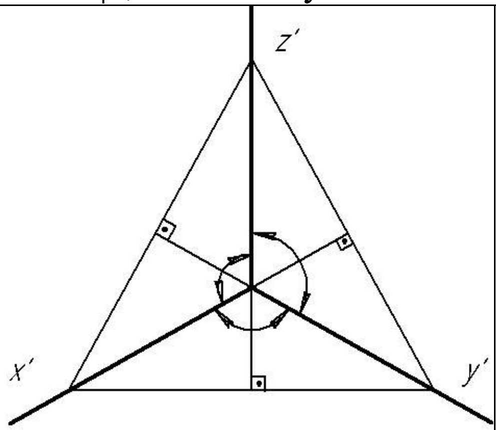
<u>- *диметрическими*</u>, если показатели искажения по двум осям равны между собой: $u = v \neq w;$ *или* $г = ц \neq v$ и т.д.

- триметрическими, если все три коэффициента искажения по осям отличаются друг от друга $u \neq v \neq w$;.

Аксонометрические проекции отличаются по углу, который образуется проецирующим лучом S с плоскостью проекций П’:

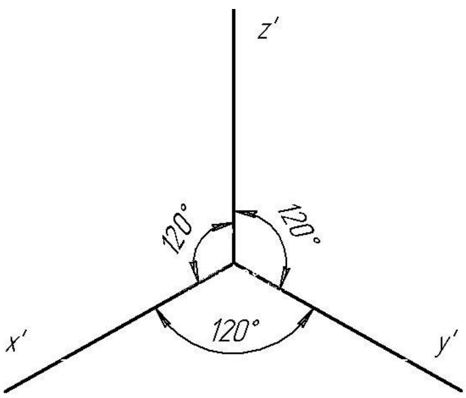
$\varphi=90^0$ – прямоугольная аксонометрия,

$\varphi \neq 90^0$ – косоугольная аксонометрия.

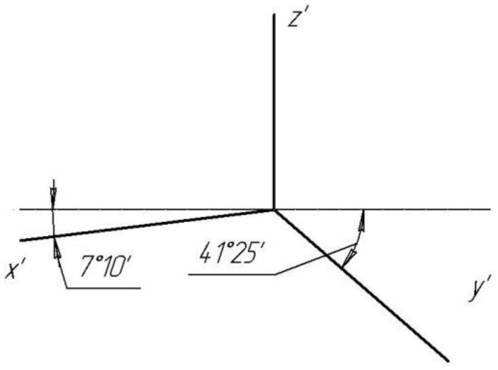
	Некоторые свойства ортогональной аксонометрии: а) аксонометрические оси в ортогональной аксонометрии являются высотами треугольника следов. Треугольник, по которому плоскость П’ пересекает координатные плоскости называют треугольником следов. б) треугольник следов всегда остроугольный, в) три полупрямые, выходящие из одной точки и лежащие в одной плоскости только в том случае могут являться аксонометрическими осями ортогональных проекций, если они образуют между собой тупые углы.

2. Стандартные аксонометрические системы.

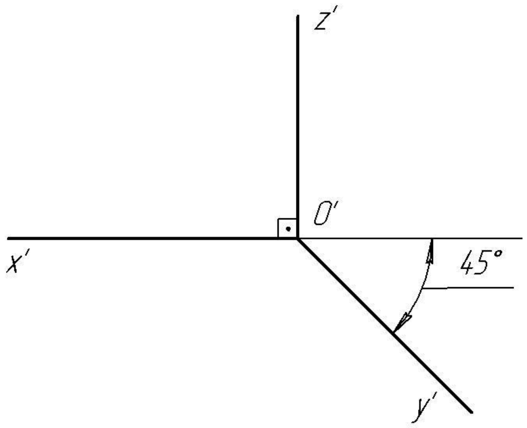
Прямоугольная изометрия.

	В прямоугольной аксонометрии $u^2+v^2+w^2=2+ctg^2\varphi \qquad (\varphi=90^0)$, где φ – угол между направлением проецирования на плоскость П’. Но в изометрии *u=v=w, 3u²=2*; $u=v=w=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}82$. На практике пользуются приведенной ортогональной изометрией, в которой показатель искажения приводится к единице, т.е. *u=v=w=1*. При этом изображение получит увеличение в 1,22 раза по сравнению с оригиналом (1/0,82=1,22).

Прямоугольная диметрия

	Наиболее распространенный случай когда *u=w*, *v=1/2u/* Тогда $2U^2+1/4U^2=2$, а $u=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}94$. Следовательно в прямоугольной диметрии по двум осям (x’,z’) или по прямым параллельным этим осям получается сокращение 0,94, а по третьей оси y’=0,47. На практике пользуются приведенными коэффициентами искажения U=W=1; V=0,5. Масштаб увеличения определятся соотношением 1/0,94=1,06.

Косоугольная фронтальная диметрия.



Часто бывает необходимо выполнить аксонометрию с неискаженной плоскостью проекций. Из косоугольных аксонометрических проекций ГОСТом предусмотрено применение фронтальных изометрии и диметрии.

В этом случае плоскость проекций П’ располагается параллельно координатной плоскости XOZ. Тогда оси координат X и Z спроецируются на нее в натуральную величину и коэффициенты искажения по ним будут равны 1. При этом нельзя пользоваться ортогональным проецированием т.к. ось y изобразится точкой.

u=w=1.

Из соотношения $u^2+v^2+w^2=2+\operatorname{ctg}\varphi$, $v=\operatorname{ctg}\varphi$,

где φ – угол между направлением проецирования и плоскость П’

Это равенство позволяет сделать вывод о том, что косоугольные аксонометрические проекции на плоскость, параллельную одной из плоскостей проекций, являются диметрическими проекциями.

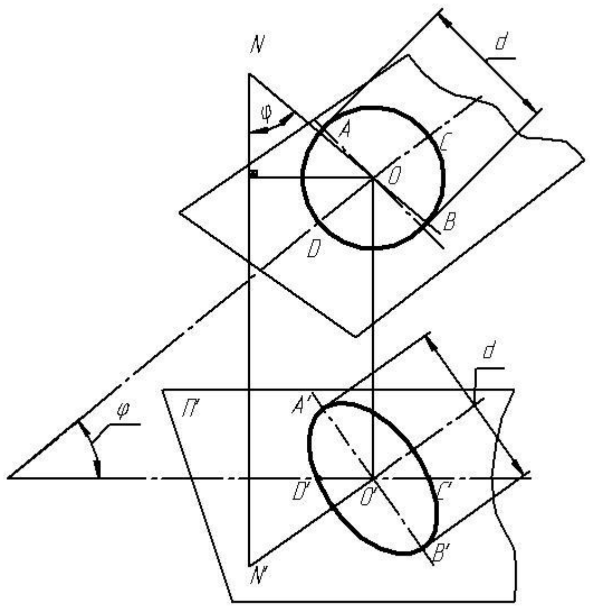
Если $\varphi=45^0$, $ctg45^0=1$, получаем косоугольную изометрическую проекцию с коэффициентами искажения равными 1.

ГОСТ рекомендует строить фронтальную диметрию с сокращением размеров по оси y' вдвое: u=w; v=0,5.

Фронтальную диметрическую проекцию следует применять в тех случаях, когда целесообразно сохранить неискаженными фигуры, расположенные в плоскостях, параллельным фронтальной плоскости проекций.

Например фигуру, имеющую множество окружностей располагают так, чтобы окружности были параллельными фронтальной плоскости и в аксонометрии неискаженными (оси, валы и т.п.).

Окружность в аксонометрии.



При параллельном проецировании окружности на какую-либо плоскость П' получается ее изображение в общем случае в виде эллипса.

Окружность, лежащую в плоскости q составляющую с плоскостью аксонометрических проекций П' угол φ, спроецировать на П'.

В точке О проведем $ON \perp q$. A'B'=d, т.к. $AB \parallel П'$ – большая ось эллипса. Все остальные диаметры <d т.к. проецируются с уменьшением.

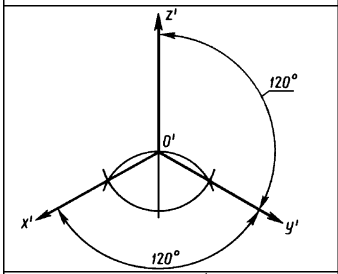
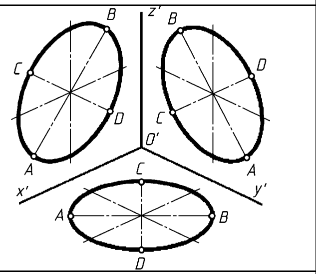
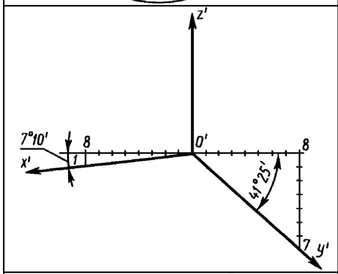
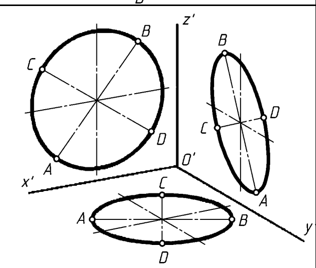
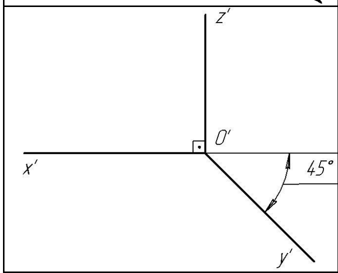
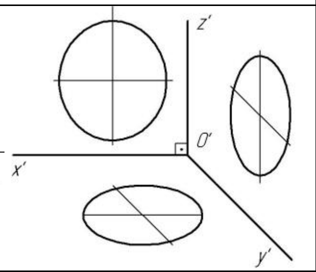
Рассмотрим угол N'O'B'. Он является проекцией прямого угла NOB, одна из сторон которого OB ∥ П'. Значит O'B' ⊥ O'N' – большая ось эллипса перпендикулярна к проекции нормали ON.

Малая ось C'D' эллипса параллельна проекции нормали ON к плоскости окружности q. C'D' ⊥ A'B'; N'O' ⊥ A'B' $\Rightarrow$ C'D' ∥ N'O'

Поэтому длина малой оси эллипса: C'D'=d cosφ.

При выполнении аксонометрических чертежей часто приходится строить окружности, расположенные в координатных плоскостях или параллельные им. *Тогда нормалью к плоскости окружности будет отсутствующая ось*. Отсюда вывод:

Для прямоугольных аксонометрических проекций малая ось эллипса, изображающего окружность, лежащую в одной из координатных плоскостей, параллельна аксонометрической проекции натуральной оси, отсутствующей в этой плоскости, а большая ось ей параллельна.

Аксонометрические оси	Аксонометрические изображения	Виды акс. проекций	Значения a и b и расположение большой оси		
			xz (эллипс)	xy (Элл. 2)	yz (элл.3)
		прямо-угольная изометрия	a=1,22d под углом 90^0 к оси y b=0.71d	a=1,22d под углом 90^0 к оси z b=0.71d	a=1,22d под углом 90^0 к оси x b=0.71d
		прямо-угольная диметрия	a=1.06d под углом 90^0 к оси y b=0.95d	a=1.06d под углом 90^0 к оси z b=0.35d	a=1.06d под углом 90^0 к оси x b=0.35d
		косоуголь-ная димет-рия	a=d b=d	a=1.07d под углом $7^0 14'$ к оси x b=0.33d	a=1.07d под углом $7^0 14'$ к оси z b=0.33d

Прямоугольные аксонометрические изображения больше соответствуют зрительному восприятию объектов.

Однако при ортогональном проецировании возникают угловые искажения, связанные с тем, что прямые углы между координатными осями проецируются в тупые углы. В изометрии эти искажения одинаковы для всех координатных плоскостей.

В диметрии угловые искажения минимальны для фронтальной плоскости.

Исходя из этого прямоугольное изометрическое изображение следует применять в случае, когда наиболее важные или сложные элементы расположены в плоскостях, параллельных каждой из координатных плоскостей.

Этот способ предпочитают в случаях когда одинаково интересны элементы, расположенные во взаимно - перпендикулярных плоскостях разреза, показанного на изображении.

Прямоугольное диметрическое изображение применяют в случаях, когда хотят выделить на изображении элементы, расположенные параллельно фронтальным плоскостям, т.е. выделить «вид спереди». При наличии на изображении разреза выделяется одна из его плоскостей.

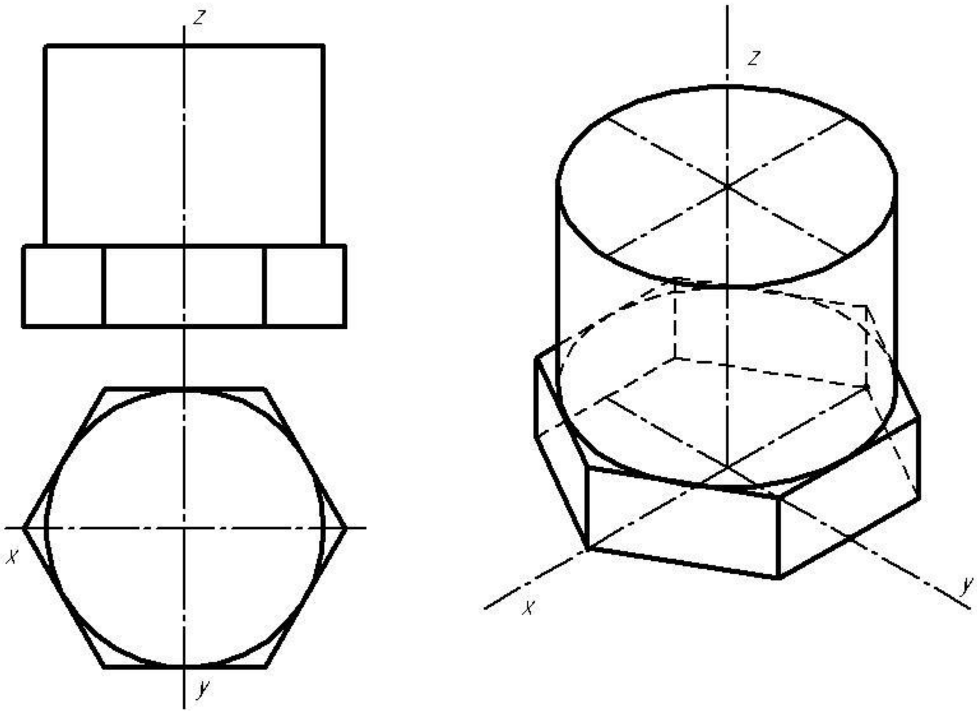
Косоугольные аксонометрические изображения в большей степени отличаются от естественного зрительного восприятия, однако обладают важным достоинством: благодаря расположению плоскостей аксонометрической проекции параллельно одной из координатных плоскостей проекций, элементы, параллельные ей, проецируются без линейных и угловых искажений.

Наиболее естественным из косоугольных аксонометрических изображений является косоугольные диметрические изображения. Это удобно для изображения изделий, содержащих ряд окружностей в плоскостях фронтального уровня.

4. Построение аксонометрических изображений.

Основой для построения аксонометрического изображения обычно *служит комплексный чертеж.* Изображаемый объект «привязывается» к прямоугольной системе координат, которая будет соответствовать системе аксонометрических осей. Поэтому в принципе каждая точка может быть перенесена с комплексного чертежа на аксонометрический при помощи ее координат в выбранной системе. Как правило, оси координат совмещаются с осями симметрии объекта.

Следует отметить важную особенность: на аксонометрическом изображении сохраняются равенства и параллельность отрезков прямой, если это имеет место на комплексном чертеже.



Последовательность построений:

1. Выбор аксонометрической системы (прямоугольная изометрия), руководствуясь приведенными выше соображениями.

2. Вычерчивание опорных аксонометрических осей. В данном случае оси позволяют определить положение основания и параллельных ему сечений.

3. Нанесение местных полуосей, на которых строятся эллипсы.

4. На имеющихся осях вычерчиваются опорные плоские элементы изображения – эллипсы и параллелограммы.

5. Дополнение изображения остальными линиями, в том числе и очерковыми.

6. Снятие вспомогательных построений, придание изображению окончательного вида.

25. Развертывание поверхностей.

Общие положения:

Развертывание – процесс совмещения поверхности с плоскостью. Если поверхности совмещаются с плоскостью без разрывов и складок, то они называются развертывающимися, а фигура на плоскости называется разверткой поверхности.

Для образования развертки поверхность нужно условно разрезать по некоторой линии. Геометрическое преобразование поверхности в плоскую фигуру является взаимно-однозначным и обладает следующим свойством:

На развертке охраняется:

- длины линий, лежащих на поверхности,
- величины углов между линиями,
- площади фигур, образованные замкнутыми линиями.

К группе развертывающихся поверхностей относятся только линейчатые поверхности с пересекающимися или параллельными образующими (конус, цилиндр, гранные поверхности).

Неразвертываемые поверхности могут приближенно совмещаться с плоскостью (сфера, тор и т.п.).

Для получения приближенной развертки такой поверхности ее разбивают на части, которые приближенно можно заменить развертывающимися поверхностями и строят развертки этих частей.

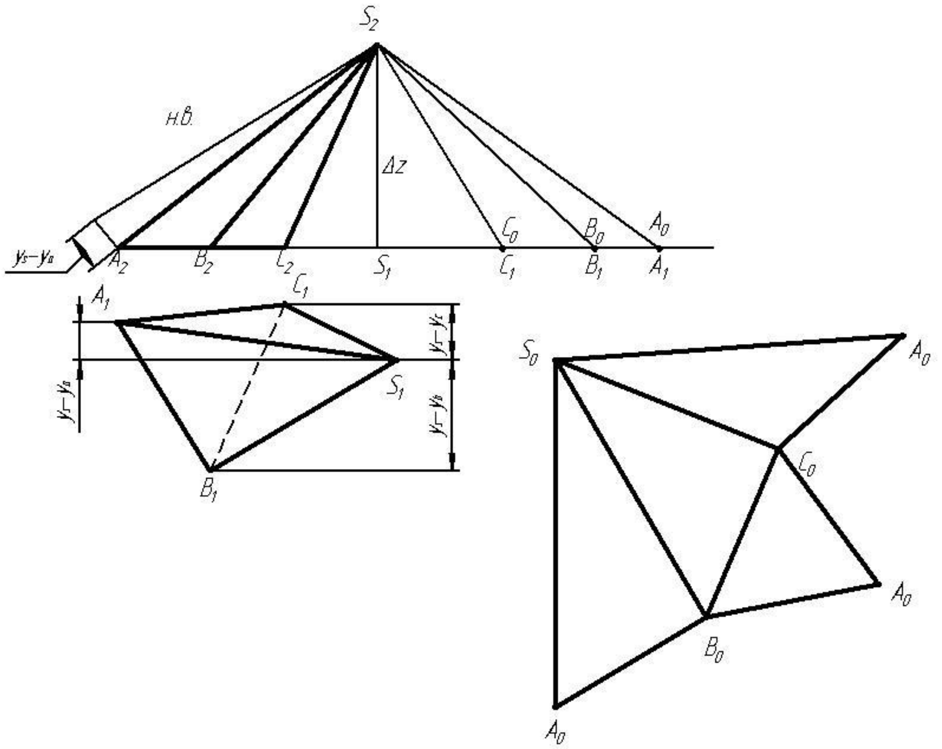
Чертежи разверток поверхностей имеют широкое применение в производстве изделий из листового материала в судостроении, жестяных работах, в котельном производстве, в самолетостроении.

Развертка многогранников

Разверткой поверхности многогранников называется плоская фигура, полученная при последовательном совмещении всех его граней с плоскостью.

Построение этой развертки сводится к построению истинных размеров и формы отдельных граней многогранника. Истинные размеры ребер, сторон, основания определяются методами вращения или перемены плоскостей проекций, прямоугольного треугольника.

Пример 1. Построить развертку треугольной пирамиды. Построение развертки сводится к построению натуральных величин треугольников – граней пирамиды (способ триангуляции). Они определяются методом прямоугольного треугольника.



Пример 2. Построить развертку треугольной призмы ABCDEF.

1. Если основание призмы на одной проекции изображается в натуральную величину, то развертку удобнее строить **методом раскатки**.

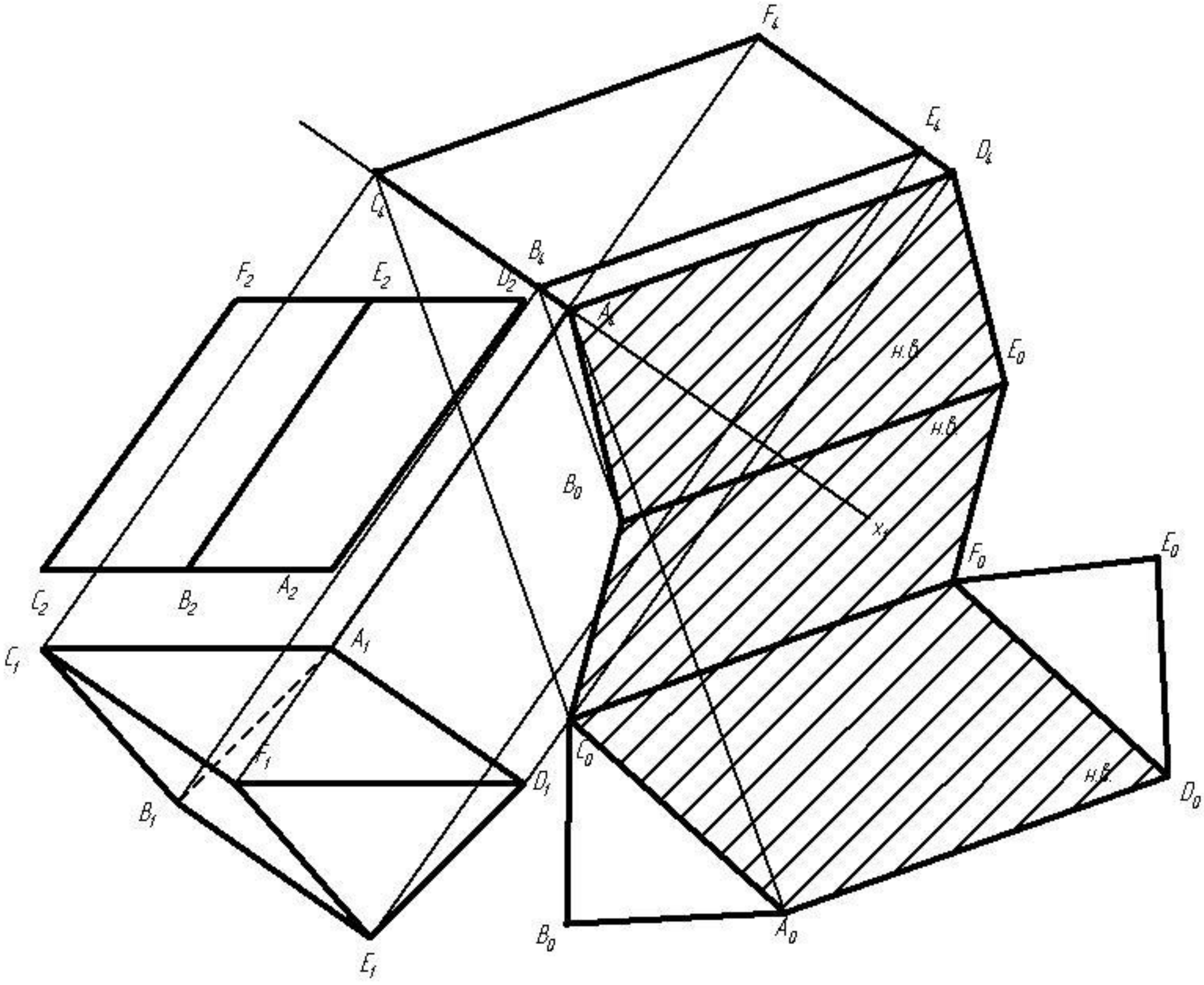
2. Если основание призмы занимает общее положение, а ребра параллельны плоскости проекций, то применяют <u>метод нормального сечения</u>. Преобразованием проекций ребра приводят в нужное положение.

Для решения данной задачи используем метод раскатки.

- заменой плоскостей проекций переводим ребра призмы AD, BE, CF в положение параллельное π_4
- грань ABED поворачиваем вокруг ребра AD
- для нахождения совмещенного положения B_4 перемещаем по перпендикуляру к A_4D_4 и засекаем на этом луче радиусом $R=A_1B_1$ с центром в т. A_4 точку B_4. Через B_0 проводим $B_0E_0 \parallel A_4D_4$.

- принимаем совмещенное положение B_0E_0 за новую ось и вращаем вокруг нее грань BEFC. Для этого из точки C_4 проводим луч $\perp B_0C_0$, а из точки B_0 дугу $R=B_1C_1$ и т.д.

- пристраиваем к развертке боковых граней призмы треугольники оснований $A_0B_0C_0$ и $D_0\,E_0\,F_0$ получаем развертку поверхности призмы.



<u>Развертка кривых поверхностей</u>

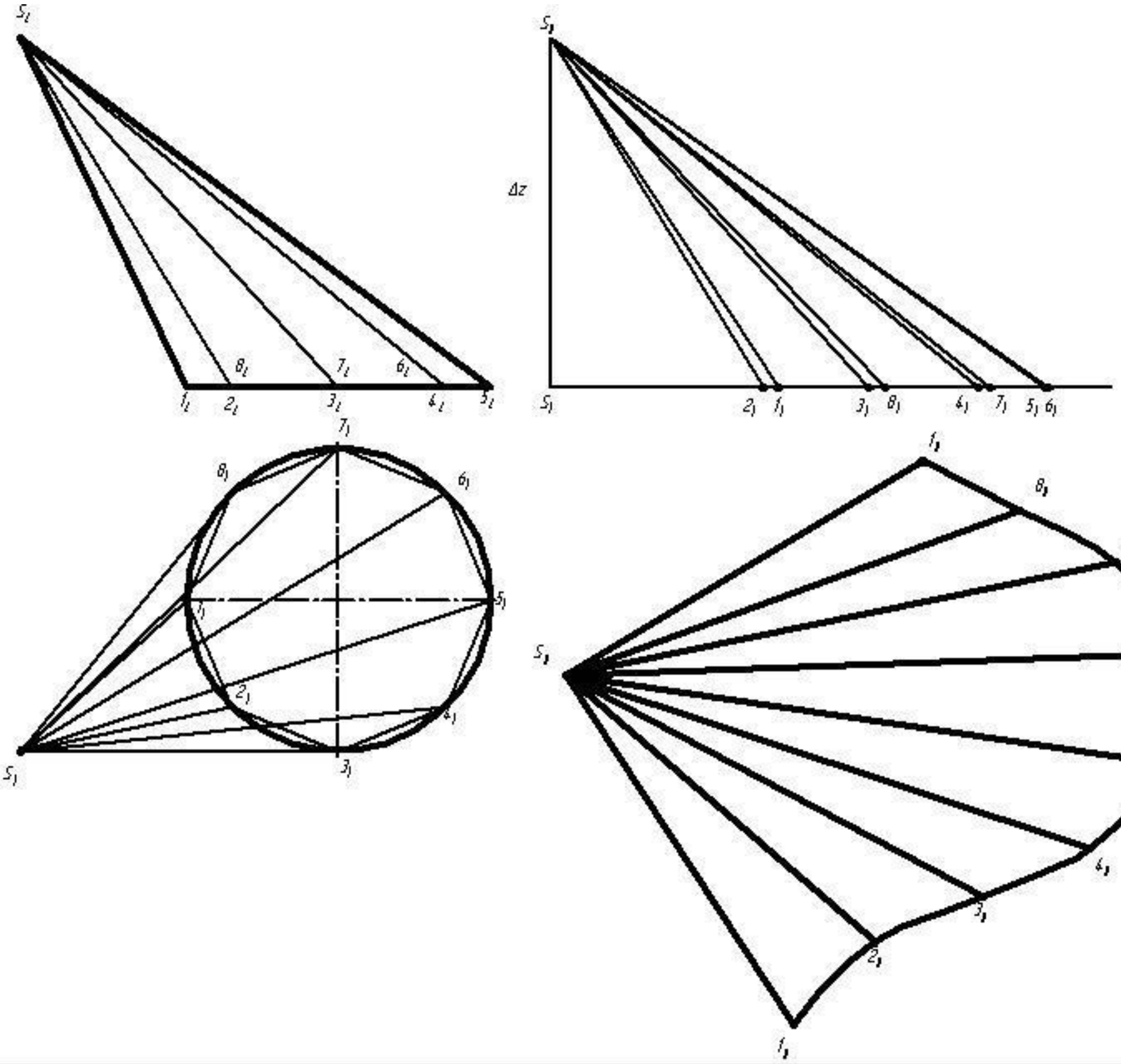
<u>Пример 3</u> – построить развертку эллиптического конуса, заданного круговым основанием и вершиной.

Способ триангуляции (треугольников). Этот способ применяется для построения разверток линейчатых поверхностей (кроме цилиндрических).

Сущность метода треугольников заключается в том, что кривую линейчатую поверхность заменяют вписанной многогранной с треугольными гранями. В данном случае коническая поверхность заменяется поверхностью вписанной пирамиды и далее боковая поверхность развертывается в следующем порядке:

- определяются длины ребер и сторон основания

-на плоскости чертежа строятся последовательно грани пирамиды.

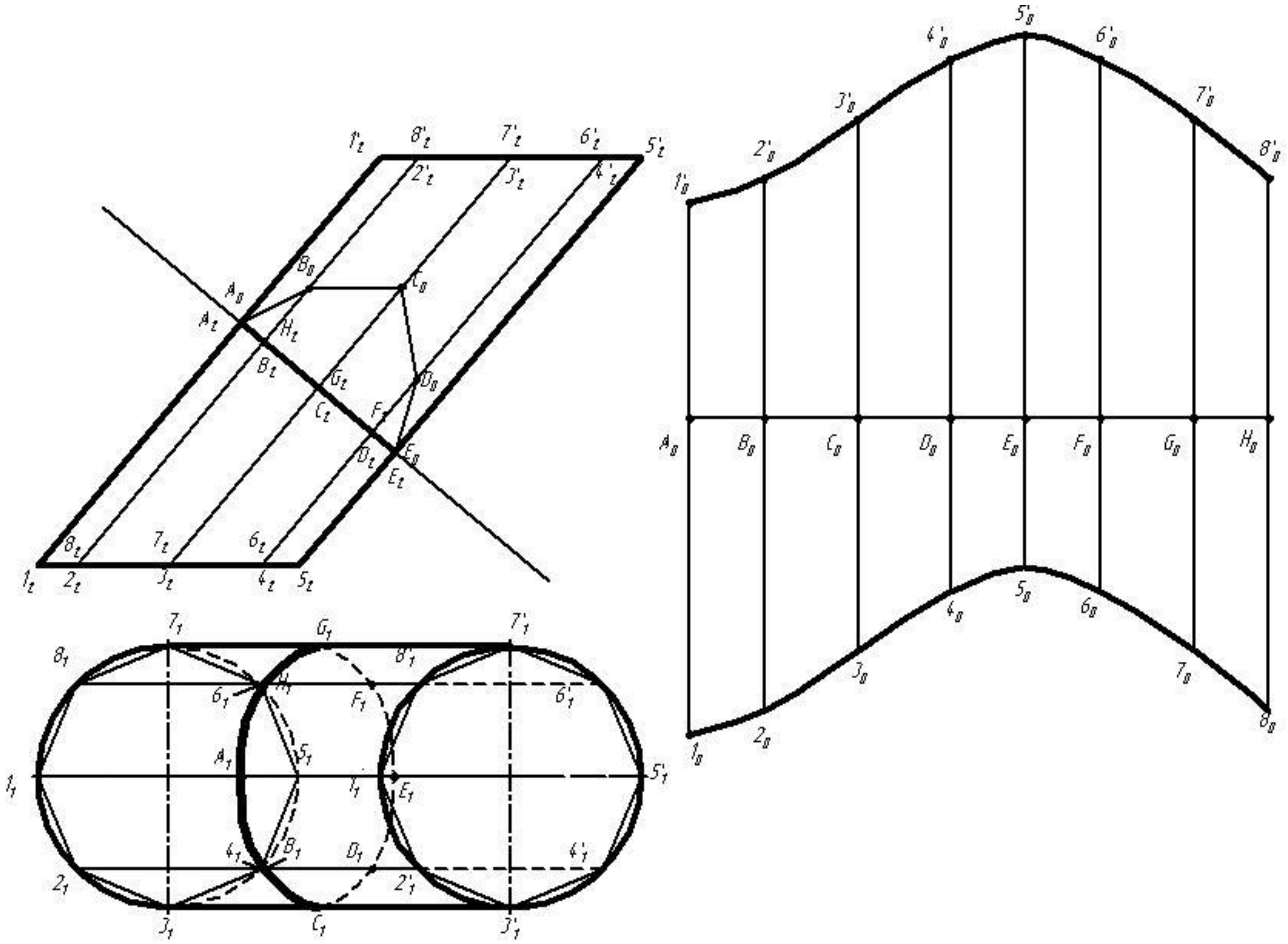


<u>Пример 4</u> – Построить развертку боковой поверхности цилиндра с круговым основанием.

Способ нормального сечения. В данную цилиндрическую поверхность вписывается призма с узкими боковыми гранями. Образующие цилиндра должны быть линиями уровня.

Порядок построения:

- в поверхность эллиптического цилиндра вписывается призма
- способом замены плоскостей проекций определяется натуральная величина нормального сечения,
- проводится прямая линия и от точки A_0 откладываются отрезки A_0B_0, B_0C_0 и т.д. Затем от полученных точек откладываются отрезки A_01_0 и $A_01_0^{/}$ и т.д.



<u>*Развертка неразвертывающихся поверхностей.*</u>

Для получения развертки неразвертывающихся поверхностей вращения применяют способ вспомогательных цилиндров и конусов.

Способ цилиндров: заданную поверхность вращения разбивают с помощью меридианов на узкие равные доли. Каждая доля заменяется цилиндрической поверхностью касательной заданной в точках среднего меридиана.

Границами образующих служат плоскости меридианов, ограничивающих эту долю. Затем делают развертку методом нормального сечения.

Пример 5 – построить развертку сферы.

1. Разобьем сферу на 4 части с помощью меридианов, возьмем одну из них, средним меридианом которой является главный меридиан.

2. Заменим эту часть сферы цилиндрической поверхностью, описанной около нее. Образующие ее фронтально-проецирующие прямые проецируются на плоскость $П_1$ в натуральную величину. Нормальное сечение цилиндрической поерхности совпадает с ½ главного меридиана.

3. Вписываем в цилиндрическую поверхность призматическую, для чего делим половину главного меридиана на 4 части (точки 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2) и через точки деления проводим образующие цилиндрической поверхности ($2_1 2'_1$, $3_1 3'_1$ и т.д.).

4. Спрямляем ломаную 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2 в отрезок прямой и через точки деления проводим перпендикулярно к нему образующие (ребра призмы)

5. Концы образующих соединяем плавной кривой.