

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики и телекоммуникаций
Кафедра высшей математики

Методическое пособие

**Дифференциальное исчисление функций
нескольких переменных**

Киров 2010

Печатается по решению редакционно – издательского совета
Вятского государственного университета

УДК 517.2(07)
О-629

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики ВятГУ А.С. Махнев

Составитель: старший преподаватель кафедры ВМ Опушнева Е.П.
Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных: методическое пособие к решению задач для студентов ФАМ, ФСА, ЭТФ, ХФ, БФ/ Е.П. Опушнева. -1-е издание-Киров: Издательство ВятГУ, 2010. - 35с.

Компьютерная верстка Е.П. Опушневой

Подписано в печать

Усл.печ. л.

Бумага офсетная

Печать копир

Заказ №

Тираж

Бесплатно

Текст напечатан с оригинала – макета, представленного автором.

610000, Киров, ул. Московская, 36.

Оформление обложки, изготовление – ПРИП ВятГУ.

©

© Вятский государственный университет, 2010

Содержание

1. Область определения функции.....	4
2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	7
2.1. Частные производные первого порядка.....	7
2.2. Полное приращение функции. Дифференциал функции многих переменных.	10
2.3. Применение полного дифференциала к приближенному вычислению значений функций.....	13
2.4. Частные производные высших порядков.	14
2.5. Дифференциалы высших порядков.	16
3. неявные функции.....	19
3.1. неявная функция одной переменной.....	19
3.2. неявно заданные функции нескольких переменных и их дифференцирование.	19
4. Производная по направлению. Градиент.....	22
4.1. Производная по направлению.	22
4.2. Градиент и его связь с производной по направлению.	23
5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	26
6. Экстремум функции нескольких переменных.....	28
6.1. Необходимые условия экстремума.	28
6.2. Достаточные условия экстремума.	30
7. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции в ограниченной замкнутой области	32
8. Контрольные вопросы и типовые задачи.....	36

1. Область определения функции

Определение. Переменная z называется функцией двух действительных переменных x и y , если по некоторому правилу или закону каждой паре чисел (x, y) из некоторого множества ставится в соответствие одно определенное значение z . Обозначается так: $z = f(x, y)$ или $z = g(x, y)$ и т.д. При этом буквой f (или g) мы символически обозначаем то правило, по которому данной паре чисел (x, y) ставится в соответствие число z .

Переменные x и y называются независимыми переменными или аргументами, а переменная z - зависимой переменной.

Определение. Множество пар действительных чисел (x, y) , для которых определено z , называется *областью определения функции*.

Пример 1. Для функции $z = x^2 + y^2$ областью определения будет совокупность всех точек плоскости Oxy , или, как говорят, вся плоскость Oxy .

Пример 2. Для функции $z = \frac{x+y}{x-y}$ областью определения будет вся плоскость Oxy , за исключением точек прямой $y = x$.

Пример 3. Для функции $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ областью определения будет множество точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют соотношениям $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Это будут точки круга радиуса 2 с центром в начале координат за исключением точек внутренности круга радиуса 1 с центром в начале координат. Это множество изображено на рис. 1.

Пример 4. Для функции $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 1}$ областью определения будет множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношениям $|x| \geq 2, |y| \geq 1$. Это множество всех точек плоскости, не принадлежащих внутренности прямоугольника, изображенного на рис.2.

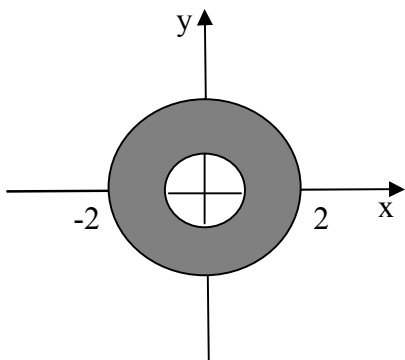


Рис. 1

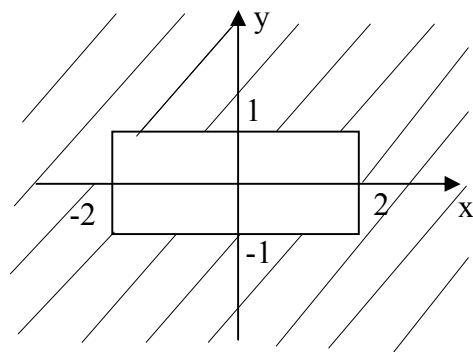


Рис. 2

Определение. Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства $(x, y, f(x, y))$. Это будет, вообще говоря, некоторая поверхность; в свою очередь, равенство $z = f(x, y)$ называется *уравнением поверхности*.

Очевидно, что не всякая поверхность может служить графиком функции двух переменных: таким графиком может служить только такая поверхность, которая пересекается с каждой прямой, параллельной оси Oz , не более чем в одной точке.

Построение графиков функций двух переменных во многих случаях представляет значительные трудности. Поэтому существует ещё один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $z = c$, где c - любое число, т.е. плоскостями параллельными плоскости Oxy .

Определение. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости Oxy , в которых функция принимает одно и то же значение c .

Очевидно, при различных c получаются различные линии уровня для данной функции.

Пример 5. 1) Для функции $z = 1 - x - y$ линии уровня образуют семейство параллельных прямых $1 - x - y = c$ (см. рис.3);

2) Для функции $z = x^2 + y^2$ линии уровня образуют семейство концентрических окружностей (см. рис. 4). Уравнению линии уровня, соответствующей значению функции, равному c ($c > 0$), будет $x^2 + y^2 = c$. Это уравнение окружности радиуса $R = \sqrt{c}$. При $c = 0$ линия уровня вырождается в точку (начало координат).

3) Для функции $z = x^2 - y^2$ семейство линий: для $c > 0$ это будут равносторонние гиперболы с фокусами на оси Ox ; а для $c < 0$ это будут равносторонние гиперболы с фокусами на оси Oy ; наконец, для $c = 0$ линии уровня – прямые $y = \pm x$, являющиеся асимптотами этих гипербол.

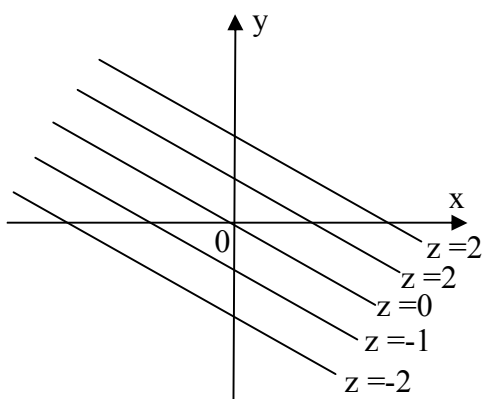


Рис. 3.

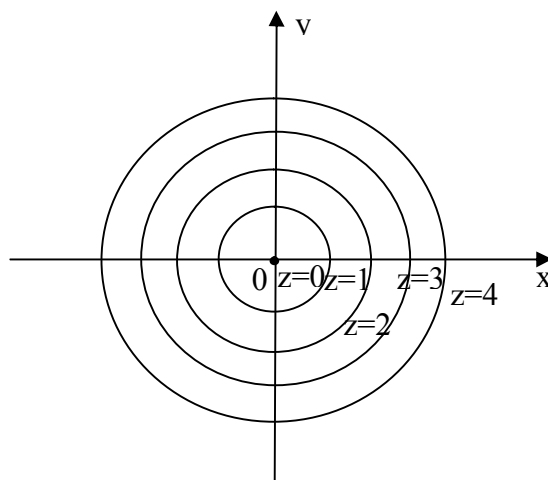


Рис. 4.

Определение. Обобщая определение функции двух переменных на случай функции трех переменных, скажем, что *и есть функция трёх переменных* x, y, z ,

если по некоторому закону каждой тройке действительных чисел (x, y, z) из некоторого множества ставится в соответствие вполне определенное число u . Обозначается так: $u = f(x, y, z)$.

Областью определения функции $u = f(x, y, z)$ называется то множество точек пространства, для которых функция определена.

Пример 6. Функция $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$ определена для тех точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$. Множество этих точек образует шар радиуса 3 с центром в начале координат, причем граница шара принадлежит области определения функции.

Пример 7. Функция $u = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ определена для тех точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенствам $-1 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \leq 1$ и $z \neq 0$. Или, что то же самое, $\begin{cases} z \neq 0 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$. Областью определения является множество точек пространства $Oxyz$, ограниченное конической поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$, исключая точку с координатами $(0, 0, 0)$.

Для функции трех переменных вводится понятие поверхности уровня.

Определение. Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется множество действительных точек (x, y, z) пространства $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же значение c .

Пример 8. Для функции $u = 5x - 4y + 6z + 7$ поверхности уровня образуют семейство параллельных плоскостей; для функции $u = \frac{1}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$ поверхности уровня – эллипсоиды с центром в начале координат $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = c$ ($c \neq 0$).

Определения, приведенные для функций двух и трех переменных, обобщаются на случай функций четырех и большего числа переменных. Скажем, что u есть функция n действительных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если по некоторому закону каждой системе n действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из некоторого множества ставится в соответствие определенное число u .

2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

2.1. Частные производные первого порядка.

Перед тем, как давать определения частных производных, введем понятие предела функции нескольких переменных.

Предположим, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некотором множестве определения Ω и точка $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$ принадлежит множеству Ω .

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет пределом число A при стремлении переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответственно, к $a_1, a_2, \dots, a_n$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое что $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$, лишь только $|x_1 - a_1| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta$.

При этом точка $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предполагается взятой из Ω и отличной от $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Итак, неравенство $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - A| < \varepsilon$ должно выполняться во всех точках множества Ω , лежащих в достаточно малой окрестности $(a_1 - \delta, a_1 + \delta; \dots, a_n - \delta, a_n + \delta)$ точки M_0 , но исключая саму эту точку (если она принадлежит Ω).

Обозначают предел функции так:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ или } A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Определение. Выражение $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ представляющее собой приращение функции $z = f(x, y)$ при переходе от точки $P_0(x_0, y_0)$ к точке $P(x_0 + \Delta x, y_0)$ называется *частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной x* и обозначается $\Delta_x z$. Индекс x при Δ указывает, что приращение берется по x при условии, что другая независимая переменная постоянна.

Определение. Если $z = f(x, y)$, то, полагая, например, y постоянной, получаем производную $f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, которая называется *частной производной функции z по переменной x первого порядка*.

Также встречаются следующие обозначения частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x : $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $z'_x(x, y)$, $f'_x(x, y)$.

Таким образом, имеем:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то частная производная по x имеет вполне определенное значение в данной точке. Таким образом, частная производная по

x сама является функцией, определенной во всех точках (x, y) плоскости, где предел отношения $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ существует (при $\Delta x \rightarrow 0$).

Аналогично определяют *частное приращение по y*

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

и *частную производную по y первого порядка*

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Частная производная по y в любой точке (x, y) обозначается так:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ или } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, z'_y(x, y), f'_y(x, y).$$

Частная производная по x (по y) характеризует скорость изменения функции в направлении оси Ox (Oy) в данной точке.

Определения частного приращения и частных производных переносятся и на случай функций трех, четырех и т.д. переменных. Очевидно, что функция n независимых переменных имеет n различных частных производных. Каждая из этих производных выражает локальную скорость изменения функции в направлении соответствующей координатной оси.

Техника нахождения частных производных ничем не отличается от нахождения производных в случае функции одной переменной. Нужно только помнить, что если, например, мы находим частную производную по x , то все остальные переменные следует рассматривать как постоянные величины (числа).

Пример 1. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = 3x^2 - xy^3 + \frac{2}{y} - \cos 7x$.

Решение:

Рассматривая y как постоянную величину (как константу), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - y^3 + 7 \sin 7x; \text{ рассматривая } x \text{ как постоянную величину, получим}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3xy^2 - \frac{2}{y^2}.$$

Пример 2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \arctg \frac{y-1}{3+x^2}$.

Решение: Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\operatorname{arctg} \frac{y-1}{3+x^2} \right)'_x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y-1}{3+x^2} \right)^2} \cdot \left(\frac{y-1}{3+x^2} \right)'_x = \\
&= \frac{(3+x^2)^2}{(3+x^2)^2 + (y-1)^2} \cdot (y-1)(-1)(3+x^2)^{-2} (3+x^2)'_x = \\
&= - \frac{(3+x^2)^2}{(3+x^2)^2 + (y-1)^2} \cdot \frac{y-1}{(3+x^2)^2} \cdot 2x = - \frac{2x(y-1)}{(3+x^2)^2 + (y-1)^2};
\end{aligned}$$

рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\operatorname{arctg} \frac{y-1}{3+x^2} \right)'_y \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y-1}{3+x^2} \right)^2} \cdot \left(\frac{y-1}{3+x^2} \right)'_y = \\
&= \frac{(3+x^2)^2}{(3+x^2)^2 + (y-1)^2} \cdot \frac{1}{3+x^2} (y-1)'_y = \\
&= \frac{(3+x^2)^2}{(3+x^2)^2 + (y-1)^2} \cdot \frac{1}{(3+x^2)} \cdot 1 = \frac{3+x^2}{(3+x^2)^2 + (y-1)^2}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{xy}(1 + \ln 3x)^2$.

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } \frac{\partial z}{\partial x} &= e^{xy} (xy)'_x (1 + \ln 3x)^2 + e^{xy} \cdot 2(1 + \ln 3x)(1 + \ln 3x)'_x = \\
&= e^{xy} y(1 + \ln 3x)^2 + e^{xy} \cdot 2(1 + \ln 3x) \frac{1}{3x} \cdot 3 = e^{xy} (1 + \ln 3x) \left(y(1 + \ln 3x) + \frac{2}{x} \right); \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= e^{xy} (xy)'_y (1 + \ln 3x)^2 + e^{xy} \cdot \left((1 + \ln 3x)^2 \right)'_y = x e^{xy} (1 + \ln 3x)^2 + e^{xy} \cdot 0 = \\
&= x e^{xy} (1 + \ln 3x)^2.
\end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = z^{x-y^3}$.

$$\begin{aligned}
\text{Решение: } \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(z^{x-y^3} \right)'_x = z^{x-y^3} \ln z (x-y^3)'_x = z^{x-y^3} \ln z \cdot 1 = z^{x-y^3} \ln z; \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \left(z^{x-y^3} \right)'_y = z^{x-y^3} \ln z (x-y^3)'_y = z^{x-y^3} \ln z \cdot (-3y^2) = -3y^2 z^{x-y^3} \ln z; \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \left(z^{x-y^3} \right)'_z = (x-y^3) z^{x-y^3-1}.
\end{aligned}$$

2.2. Полное приращение функции. Дифференциал функции многих переменных.

а) Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, заданную в некоторой области G . Пусть $P(x, y)$ - точка области. Найдем изменение функции при переходе от точки $P(x, y)$ к точке $P_1(x_1, y_1)$ той же области.

Определение. Разность значений функции в точках P_1 и P называется *полным приращением функции* $z = f(x, y)$ и обозначается Δz или $\Delta f(x, y)$:

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(P_1) - f(P) = f(x_1, y_1) - f(x, y).$$

Обозначим приращение аргументов x и y при переходе из точки $P(x, y)$ в точку $P_1(x_1, y_1)$ через Δx и Δy : $\Delta x = x_1 - x$, $\Delta y = y_1 - y$. Следовательно,

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $P_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $P(x, y)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$. Или другими словами: функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке, если имеет место равенство $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. В противном случае – функция терпит разрыв в точке P_0 .

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной на некотором множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема. Для того чтобы функция $z = f(x, y)$ была непрерывной в точке $P_0(x_0, y_0)$, необходимо и достаточно, чтобы полное приращение функции Δz стремилось к нулю при Δx и Δy , стремящихся к нулю.

Те функции, для которых полное приращение можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых линейно относительно Δx и Δy , а второе является бесконечно малым более высокого порядка малости, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (при $\rho \rightarrow 0$), называются *дифференцируемыми функциями*.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке (x, y) , то её полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (*)$$

где A и B не зависят от Δx и Δy .

Теорема (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P(x, y)$, то она непрерывна в этой точке.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P(x, y)$

и эти производные непрерывны в самой точке $P(x, y)$, то функция дифференцируема в точке $P(x, y)$.

Следствие. Из непрерывности частных производных следует непрерывность самой функции.

Определение. Выражение $A\Delta x + B\Delta y$ называется *главной линейной частью приращения функции* или *полным дифференциалом* данной функции. Итак, полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение, линейное относительно Δx и Δy , и отличающееся от приращения функции на бесконечно малую более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Коротко это выражают словами: *полный дифференциал является главной, линейной относительно Δx и Δy , частью приращения функции*.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ обозначается так:

$$dz \text{ или } df(x, y).$$

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P(x, y)$ дифференциал $dz = A\Delta x + B\Delta y$, то в этой точке существуют обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$, так что (если положить, что $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$), выражение полного дифференциала примет вид:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.} \quad (1)$$

Теорема 2. Если в точке $P(x, y)$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ существуют и непрерывны, то в этой точке функция и имеет дифференциал.

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y$.

1 способ. Выразим полное приращение функции $z = x^2 y$:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)(y + \Delta y) - x^2 y = x^2 y + 2x\Delta x y + \Delta x^2 y + x^2 \Delta y + 2x\Delta x \Delta y + \\ &+ \Delta x^2 \Delta y - x^2 y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y + y\Delta x^2 + 2x\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y \end{aligned}$$

Имея выражение (*), получаем, что $o(\rho) = y\Delta x^2 + 2x\Delta x \Delta y + \Delta x^2 \Delta y$, а $A\Delta x + B\Delta y = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y$.

Значит, полный дифференциал функции $z = x^2 y$ равен $dz = 2xy\Delta x + x^2 \Delta y$. Или, заменяя $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, получаем, что $dz = 2xydx + x^2 dy$.

2 способ. Используем формулу (1). Для этого находим частные производные функции $z = xy^2$: $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y)'_x = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y)'_y = x^2$. Тогда, подставляя найденные частные производные в формулу полного дифференциала, получаем, что $dz = 2xydx + x^2dy$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x + e^{3y})$.

Решение: Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x + e^{3y}))'_x = \frac{1}{x + e^{3y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x + e^{3y}))'_y = \frac{3e^{3y}}{x + e^{3y}}.$$

Применяя формулу (1), получаем, что $dz = \frac{1}{x + e^{3y}}dx + \frac{3e^{3y}}{x + e^{3y}}dy$.

б) Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ аналогично определяются полное приращение функции $\Delta u = f(x_1, y_1, z_1) - f(x, y, z)$, как разность значений функции в точках $P(x_1, y_1, z_1)$ и $P(x, y, z)$, и полный дифференциал функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \quad (2)$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Найти значение полного дифференциала в точке $M(1, 2, 1)$.

Решение: Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_x = -\frac{1}{2}z(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = -\frac{xz}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3};$$

Аналогично находим, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yz}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \text{ Тогда}$$

$$du = -\frac{xz}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}dx - \frac{yz}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}dy + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}dz.$$

Находим значение полного дифференциала в точке $M(1, 2, 1)$:

$$du(1,2,1) = -\frac{1 \cdot 1}{(\sqrt{1^2 + 2^2})^3} dx - \frac{2 \cdot 1}{(\sqrt{1^2 + 2^2})^3} dy + \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} dz = -\frac{dx + 2dy}{(\sqrt{5})^3} + \frac{dz}{\sqrt{5}}.$$

2.3. Применение полного дифференциала к приближенному вычислению значений функций.

Пусть известны значения дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ и ее частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x, y) . Поставим задачу о вычислении значения функции в точке $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Используя понятие полного приращения, получаем

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \Delta z.$$

Заменяя Δz полным дифференциалом dz , получим следующее приближенное равенство:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz, \text{ или } \boxed{f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y} \quad (3)$$

которое служит для приближенного вычисления $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Это равенство будет тем точнее, чем меньше Δx и Δy .

Пример. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt{1,2} + \sqrt[3]{7,7} - 2)$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2)$. Следовательно, нам нужно вычислить $f(1,2; 7,7)$. Значение функции $\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2)$ легко подсчитать при $x=1$ и $y=8$. Действительно, $f(1,8) = \ln(\sqrt{1} + \sqrt[3]{8} - 2) = \ln 1 = 0$. Поэтому в качестве исходных значений x и y принять $x=1$, $y=8$, а в качестве Δx и Δy соответственно $\Delta x=0,2$ и $\Delta y=-0,3$. Применим формулу (3). Замечая, что

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \Delta y,$$

получим:

$$\ln(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt[3]{y + \Delta y} - 2) \approx \ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2) + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 2} \left(\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} + \frac{\Delta y}{3\sqrt[3]{y^2}} \right),$$

или в данном случае:

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{1,2} + \sqrt[3]{7,7} - 2) &\cong \ln(\sqrt{1} + \sqrt[3]{8} - 2) + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt[3]{8} - 2} \left(\frac{0,2}{2\sqrt{1}} + \frac{-0,3}{3\sqrt[3]{8^2}} \right) = \\ &= 0 + 1 \cdot \left(\frac{0,2}{2} - \frac{0,3}{3 \cdot 4} \right) = 0,1 - 0,025 = 0,075. \end{aligned}$$

2.4. Частные производные высших порядков.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные первого порядка $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в каждой точке окрестности точки $P(x, y)$. В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных x и y , определенные в указанной окрестности точки $P(x, y)$.

Определение. Частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $P(x, y)$, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''_{yy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y). \end{aligned}$$

Частные производные второго порядка вида $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ называются *смешанными частными производными*.

Теорема. Если производные $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ существуют в некоторой окрестности точки $P(x, y)$ и непрерывны в самой точке P , то они равны между собой в этой точке, т.е. имеет место равенство

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Аналогично частным производным второго порядка вводятся частные производные третьего, четвертого, ..., n -го порядка и используется аналогичная теорема о равенстве смешанных производных любого порядка.

Например, частные производные третьего порядка функции $z = f(x, y)$ обозначаются: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$; смешанные частные производные:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

Пример 1. Дана функция $z = \frac{e^{xy}}{y^3}$. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение: Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{e^{xy}}{y^3} \right)'_x = \frac{y}{y^3} e^{xy} = \frac{e^{xy}}{y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{e^{xy}}{y^3} \right)'_y = \frac{xe^{xy} y^3 - 3y^2 e^{xy}}{y^6} = \frac{xye^{xy} - 3e^{xy}}{y^4} =$$

Тогда частные производные второго порядка равны соответственно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{e^{xy}}{y^2} \right)'_x = \frac{y}{y^2} e^{xy} = \frac{e^{xy}}{y};$$

В силу теоремы, получаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{e^{xy}}{y^2} \right)'_y = \frac{xe^{xy} y^2 - 2ye^{xy}}{y^4} = \frac{xye^{xy} - 2e^{xy}}{y^3}; =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{xye^{xy} - 3e^{xy}}{y^4} \right)'_y = \frac{(xe^{xy} + x^2 ye^{xy} - 3xe^{xy})y^4 - 4y^3(xy e^{xy} - 3e^{xy})}{y^8} =$$

$$= \frac{(x^2 y^2 - 6xy + 12)e^{xy}}{y^5}.$$

Пример 2. Дана функция $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение: Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x (x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x (-x \sin y - \sin y - y \cos y);$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (e^x (x \cos y - y \sin y) + e^x \cos y)'_x = (e^x ((x+1) \cos y - y \sin y))'_x =$$

$$= e^x ((x+1) \cos y - y \sin y) + e^x \cos y = e^x ((x+2) \cos y - y \sin y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (e^x (-x \sin y - \sin y - y \cos y))'_y = e^x (-x \cos y - \cos y - \cos y + y \sin y) =$$

$$= e^x (y \sin y - (x+2) \cos y).$$

Найденные производные подставляем в уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$:

$$e^x ((x+2) \cos y - y \sin y) + e^x (y \sin y - (x+2) \cos y) = 0,$$

$$e^x ((x+2) \cos y - y \sin y + y \sin y - (x+2) \cos y) = 0 \text{ или } 0 \equiv 0.$$

Получили верное тождество. Следовательно, показали то, что требовалось.

Пример 3. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ если $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(x^2 + y^2) \right)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} &= \left(\frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = \frac{4y(x^2 + y^2)^2 - (2y^2 - 2x^2)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{4y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

По теореме о равенстве смешанных производных заключаем, что

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \text{ и } \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{4y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

2.5. Дифференциалы высших порядков.

Ранее было введено понятие полного дифференциала функции $z = f(x, y)$ и получена формула $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Будем называть dz дифференциалом первого порядка.

Определение. Дифференциалом второго порядка $d^2 z$ функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее дифференциала первого порядка, рассматриваемый как функция переменных x и y при фиксированных значениях dx и dy : $d^2 z = d(dz)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет вторые непрерывные частные производные, тогда формула второго дифференциала может быть записана следующим образом:

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.} \quad (3)$$

Пример 1. Найти $d^2 z$ от функции $z = 2x^3 y - \frac{1}{x + y}$.

Решение: Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^3 y - \frac{1}{x+y} \right)'_x = 6x^2 y + \frac{1}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^3 y - \frac{1}{x+y} \right)'_y = 2x^3 + \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6x^2 y + \frac{1}{(x+y)^2} \right)'_x = 12xy - \frac{2}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(6x^2 y + \frac{1}{(x+y)^2} \right)'_y = 6x^2 - \frac{2}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x^3 + \frac{1}{(x+y)^2} \right)'_y = -\frac{2}{(x+y)^3}.$$

Тогда, используя формулу полного дифференциала, получаем

$$d^2 z = \left(12xy - \frac{2}{(x+y)^3} \right) dx^2 + 2 \left(6x^2 - \frac{2}{(x+y)^3} \right) dx dy - \frac{2}{(x+y)^3} dy^2.$$

Пример 2. Найти $d^2 z$ от функции $z = x \cos^2 y$.

Решение: Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x \cos^2 y)'_x = \cos^2 y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x \cos^2 y)'_y = 2x \cos y (-\sin y) = -x \sin 2y.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\cos^2 y)'_x = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-x \sin 2y)'_y = 2 \cos y (-\sin y) = -\sin 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x \sin 2y)'_y = -2x \cos 2y.$$

Значит, $d^2 z = -\sin 2y dx dy - 2x \cos 2y dy^2$.

Пример 3. Найти $d^2 z$ от функции $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Решение: Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\arctg \frac{y}{x} \right)'_x - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) - \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\arctg \frac{y}{x} \right)'_y - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Значит, $d^2 z = \frac{2xy dx^2 + 2(y^2 - x^2) dx dy - 2xy dy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$

3. Неявные функции

3.1. Неявная функция одной переменной.

Предположим, что нам задано уравнение, связывающее две переменные x и y . Если все члены этого уравнения перенести в левую часть, то оно может быть записано в виде

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

Определение. Всякая функция $y = f(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется *неявной функцией*, определяемой уравнением (1).

Производная функции $y = f(x)$, определяемая уравнением (1), находится по формуле (если $F'_y(x, y) \neq 0$):

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (2)$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. Найдем $f'(x)$.

Решение: Запишем уравнение в виде $F(x, y) = 0$: $x^4 + y^4 - x^2 y^2 = 0$.

Находим F'_x и F'_y : $F'_x = (x^4 + y^4 - x^2 y^2)'_x = 4x^3 - 2xy^2$;

$F'_y = (x^4 + y^4 - x^2 y^2)'_y = 4y^3 - 2x^2 y$.

Применяя формулу (2), получаем искомую производную

$$f'(x) = -\frac{4x^3 - 2xy^2}{4y^3 - 2x^2 y} = \frac{x(2x^2 - y^2)}{y(x^2 - 2y^2)}.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение $y \cos(x + 2y) - x \sin y = 1$. Найдем $f'(x)$.

Решение:

$$f'(x) = -\frac{(y \cos(x + 2y) - x \sin y - 1)'_x}{(y \cos(x + 2y) - x \sin y - 1)'_y} = -\frac{-y \sin(x + 2y) - \sin y}{\cos(x + 2y) - 2y \sin(x + 2y) - x \cos y}.$$

3.2. Неявно заданные функции нескольких переменных и их дифференцирование.

Обобщим понятие неявно заданной функции на случай функции нескольких переменных.

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$. Это уравнение определяет неявно заданную функцию $z = f(x, y)$, если эта функция непрерывна и обращает уравнение $F(x, y, z) = 0$ в тождество, т.е. $F[x, y, f(x, y)] \equiv 0$.

Частные производные функции $z = f(x, y)$, определяемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, находятся по формулам:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (3)}$$

Пример 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для функции, заданной неявно $x^2 \cos z - 2y \sin x + z \cos y = 0$.

Решение: Находим F'_x, F'_y, F'_z :

$$F'_x = (x^2 \cos z - 2y \sin x + z \cos y)'_x = 2x \cos z - 2y \cos x,$$

$$F'_y = (x^2 \cos z - 2y \sin x + z \cos y)'_y = -2 \sin x - z \sin y,$$

$$F'_z = (x^2 \cos z - 2y \sin x + z \cos y)'_z = -x^2 \sin z + \cos y.$$

Тогда частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^2 \cos z - 2y \sin x + z \cos y = 0$, равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{2x \cos z - 2y \cos x}{x^2 \sin z - \cos y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-2 \sin x - z \sin y}{x^2 \sin z - \cos y}.$$

Пример 2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $A(2, -1, 0)$ для функции, заданной неявно

$$x^2 - 3y + z = e^{\frac{z}{x}}.$$

Решение: Запишем $F(x, y, z) = 0$: $x^2 - 3y + z - e^{\frac{z}{x}} = 0$.

Находим F'_x, F'_y, F'_z :

$$F'_x = \left(x^2 - 3y + z - e^{\frac{z}{x}} \right)'_x = 2x - e^{\frac{z}{x}} \left(-\frac{z}{x^2} \right) = 2x + \frac{z}{x^2} e^{\frac{z}{x}} = \frac{2x^3 + z e^{\frac{z}{x}}}{x^2},$$

$$F'_y = \left(x^2 - 3y + z - e^{\frac{z}{x}} \right)'_y = -3,$$

$$F'_z = \left(x^2 - 3y + z - e^{\frac{z}{x}} \right)'_z = 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{z}{x}} = \frac{x - e^{\frac{z}{x}}}{x}.$$

Тогда частные производные равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\frac{2x^3 + ze^{\frac{z}{x}}}{x^2}}{\frac{x - e^{\frac{z}{x}}}{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{-3}{x}}{\frac{x - e^{\frac{z}{x}}}{x}} = \frac{3x}{x - e^{\frac{z}{x}}}.$$

Находим значения производных в точке $A(2, -1, 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{2 \cdot 2^3 + 0 \cdot e^{\frac{0}{2}}}{2 \left(2 - e^{\frac{0}{2}} \right)} = -8, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{3 \cdot 2}{2 - e^{\frac{0}{2}}} = 6.$$

4. Производная по направлению. Градиент

4.1. Производная по направлению.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$, где $\cos \alpha, \cos \beta$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпадало с направлением вектора $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Обозначим величину отрезка MM_1 через Δl . Функция $z = f(x, y)$ получит при этом приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$ ($M_1 \rightarrow M$), если он существует, называется *производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\vec{l}$* и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т.е.

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

На практике для вычисления производной функции $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ используют следующую формулу:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta.} \quad (1)$$

В частности, $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$ при $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$.

Отсюда следует, что частные производные по x и y являются частными случаями производной по направлению.

Аналогично определяется производная функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, т.е

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.} \quad (2)$$

Подобно тому, как частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении осей координат, так и производная по направлению вектора $\vec{l}$ является скоростью изменения функции в направлении вектора $\vec{l}$. Абсолютная величина производной по направлению определяет величину скорости, а знак – характеризует изменение функции (возрастание или убывание).

Пример. Дана функция $u = x^2z + 3x^3y + 5z^2y$. Вычислить производную в точке $M(1, -4, 3)$ в направлении вектора, соединяющего точку $A(1, 2, 3)$ с точкой $B(3, 3, 1)$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-1)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (1-3)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\text{Поэтому } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{1}{3}, \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Далее находим частные производные u в точке $M(1, -4, 3)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + 9x^2y, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = -30,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3 + 5z^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 48,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 10yz, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -119.$$

Подставляя в формулу (2), находим:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = -30 \cdot \frac{2}{3} + 48 \cdot \frac{1}{3} + (-119) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 75 \frac{1}{3}.$$

Так как производная положительна, то в точке $M(1, -4, 3)$ в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$ функция u возрастает.

4.2. Градиент и его связь с производной по направлению.

С производной по направлению тесно связан вектор, называемый градиентом. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, дифференцируемую в некоторой области точки $M(x, y)$.

Определение. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным от данной функции в этой точке, т.е. $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M$.

Градиент обозначают так: $\text{grad } z$ или $\text{grad } f(x, y)$.

Следовательно, по определению,

$$\boxed{\text{grad } f(x, y) = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cdot \vec{i} + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cdot \vec{j}} \quad (3)$$

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$:

$$\text{grad } u(x, y, z) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \vec{k} \quad (4)$$

Пример 1. Найти градиент функции $u = x^2 y^3 + 5z^3 - y^2 z$ в точке $M(-2, 1, 3)$

Решение: Находим частные производные u в точке $M(-2, 1, 3)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 2 \cdot (-2) \cdot 1^3 = -4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2 - 2yz, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 3 \cdot (-2)^2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 15z^2 - y^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 15 \cdot 3^2 - 1^2 = 134.$$

Следовательно, $\text{grad } u(-2, 1, 3) = -4 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j} + 134 \cdot \vec{k}$.

Используя понятие градиента функции и, учитывая, что вектор $\vec{l}$ имеет координаты $\cos \alpha, \cos \beta$, производную по направлению можно записать в виде скалярного произведения векторов $\text{grad } z$ и $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \text{grad } z \cdot \vec{l}.$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения имеем

$$\text{grad } z \cdot \vec{l} = |\text{grad } z| \cdot |\vec{l}| \cos \varphi,$$

где $|\text{grad } z|$ - длина вектора $\text{grad } z$; φ - угол между векторами $\text{grad } z$ и $\vec{l}$.

Учитывая, что $|\vec{l}| = 1$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = |\text{grad } z| \cos \varphi. \quad (5)$$

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению имеет наибольшую величину при $\cos \varphi = 1$ ($\varphi = 0$), т.е. когда направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением $\text{grad } z$. При этом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = |\text{grad } z|$.

Итак, *градиент в данной точке показывает направление, в котором функция растет быстрее всего. Абсолютная величина градиента равна наибольшей скорости изменения функции в данной точке.*

Пример 2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $u = \lg(yz) + e^{z \ln x} - z$ в точке $M(1; 0; 2)$; производную по направлению вектора $\vec{l}$, который образует с градиентом в точке $M(1; 0; 2)$ угол $\varphi = 120^\circ$.

Решение: Наибольшая скорость возрастания функции равна длине вектора градиента. Следовательно, находим градиент функции u в точке M :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u(1;0;2) &= \left. \frac{z}{x} e^{z \ln x} \cdot \vec{i} + \frac{z}{\cos^2(yz)} \cdot \vec{j} + \left(\frac{y}{\cos^2(yz)} + e^{z \ln x} \ln x - 1 \right) \cdot \vec{k} \right|_M = \\ &= 2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - \vec{k}. \end{aligned}$$

Тогда наибольшая скорость возрастания функции u в точке M равна:

$$|\operatorname{grad} z| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Используя формулу (5), получаем производную по направлению вектора $\vec{l}$, который образует с градиентом в точке $M(1;0;2)$ угол $\varphi = 120^\circ$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\operatorname{grad} z| \cos \varphi = 3 \cos 120^\circ = 3 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1,5.$$

Теорема (взаимосвязь градиента и линии (поверхности) уровня). Пусть в точке M градиент дифференцируемой функции отличен от нуля; тогда в точке M градиент перпендикулярен к любой линии (поверхности), проходящей через точку M и лежащей на линии (поверхности) уровня.

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение. Касательной плоскостью к поверхности в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется плоскость, содержащая в себе все касательные к плоским кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Если уравнение поверхности задано неявно, т.е. $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Если уравнение поверхности задано явно, т.е. $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задается уравнением:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

Оно получается из (1) путем деления его на $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ и заменой отношений $\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$ частными производными функции $z = f(x, y)$ соответственно $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$.

Определение. Нормалью к поверхности в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

В случае неявного задания функции $F(x, y, z) = 0$ уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (3)$$

В случае явного задания функции $z = f(x, y)$ уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (4)$$

Пример 1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{1} = 1$ в точке $\left(5, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Решение: Находим частные производные:

$$F'_x(x, y, z) = \frac{2x}{25}; \quad F'_x\left(5, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5},$$

$$F'_y(x, y, z) = \frac{y}{8}; \quad F'_y\left(5, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8},$$

$$F'_z(x, y, z) = 2z; \quad F'_z\left(5, 1, \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Применяя формулу (1), получаем $\frac{2}{5}(x-5) + \frac{1}{8}(y-1) + 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$ или после упрощения $16x + 5y + 40z - 105 = 0$ - уравнение касательной плоскости.

Применяя формулу (3), получаем $\frac{x-5}{\frac{2}{5}} = \frac{y-1}{\frac{1}{8}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$ или

$$\frac{x-5}{16} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-\frac{1}{2}}{40} \text{ - уравнения нормали.}$$

Пример 2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$ в точке $(-2, 3, 4)$.

Решение: Находим частные производные: $f'_x(x, y) = \frac{x}{2}$, $f'_x(-2, 3) = -1$;

$f'_y(x, y) = \frac{2y}{3}$, $f'_y(-2, 3) = 2$. Применяя формулы (2) и (4), находим

уравнение касательной плоскости:

$$z - 4 = -(x + 2) + 2(y - 3) \text{ или } x - 2y + z + 4 = 0;$$

уравнения нормали: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{1}$.

6. Экстремум функции нескольких переменных

6.1. Необходимые условия экстремума.

Пусть в некоторой области D плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y)$. Рассмотрим точку P_0 этой области.

Определение. Точка P_0 называется *точкой максимума (строгого максимума) функции* $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки P_0 , что для всех точек $P \neq P_0$, лежащих в этой окрестности, выполнено неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

На рис.3 точка P_0 - точка максимума функции.

Определение. Точка P_0 называется *точкой минимума (строгого минимума) функции* $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки P_0 , что для всех точек $P \neq P_0$, лежащих в этой окрестности, выполнено неравенство

$$f(P_0) < f(P).$$

На рис.4 точка P_0 - точка минимума функции.

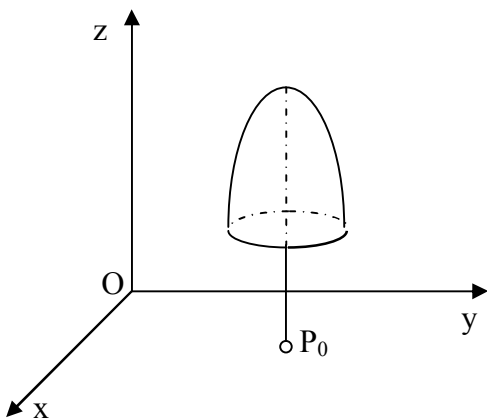


Рис.3.

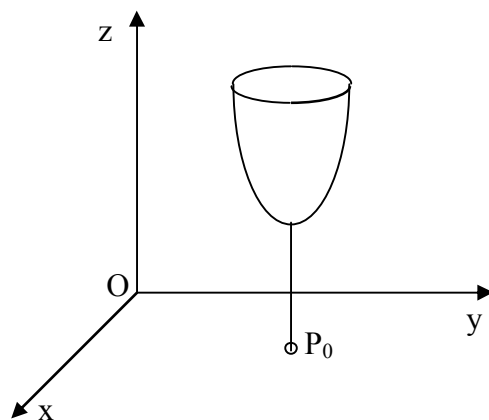


Рис.4.

Если в окрестности точки P_0 для всех точек P выполнено нестрогое неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ (или $f(P_0) \leq f(P)$), то говорят, что функция в точке P_0 имеет *нестрогий максимум (минимум)*.

Точки области D , в которых функция имеет максимум или минимум, называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами*.

Заметим, что в точке максимума функция достигает наибольшего значения только по отношению к соседним точкам, т.е. по отношению к точкам, лежащим в некоторой окрестности точки максимума. Не следует думать, что в точке максимума функция достигает наибольшего значения по сравнению со всеми

точками области D . В этой области могут быть точки, в которых функция принимает большее значение, чем в точках максимума. Аналогичное замечание имеет место и для точек минимума. Поэтому точки максимума и минимума не следует смешивать с точками, в которых функция достигает наибольшего и наименьшего значения в области.

Так же, как и в случае функции одной переменной, здесь возникает задача о нахождении необходимых условий экстремума и достаточных условий экстремума.

Необходимые условия экстремума. Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке P_0 экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю.

Т. о., в точках экстремума имеет место одновременно два равенства:

$$\boxed{\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}} \quad (1)$$

Эти условия имеют простой геометрический смысл. Они означают, что в точках максимума или минимума касательная плоскость к графику функции $z = f(x, y)$ параллельна плоскости Oxy .

Определение. Точки, в которых функция определена, и её частные производные равны нулю, называются *стационарными точками*.

Таким образом, функция, имеющая частные производные во всей области определения то экстремумы следует искать среди стационарных точек. Однако встречаются случаи, когда в отдельных точках хотя бы одна из частных производных не существует (т.е. функция не дифференцируема в них). Подобные точки тоже следует причислить к «подозрительным» по экстремуму, наряду со стационарными точками. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (задает верхнюю часть конуса) имеет минимум в точке $(0, 0)$, но не имеет производных в этой точке.

Определение. Точки, в которых функция определена, и её частные производные равны нулю или хотя бы одна не существует, называются *критическими точками*.

Обобщая выше сказанное, делаем вывод, что точки экстремума функции следует искать среди критических точек.

Равенство нулю частных производных не является достаточным условием для экстремума функции. Легко привести пример функции, для которой в некоторой точке все частные производные первого порядка равны нулю, однако в этой точке функция не имеет экстремума. Например, рассмотрим функцию $z = x^2 - y^2$ (задает гиперболический параболоид). В точке $(0, 0)$ её частные производные обращаются в нуль. Но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Если из точки $(0, 0)$ сместиться по оси Ox ($y = 0$), то значения функции становятся положительными ($z = x^2$). Если же сместиться по

оси $Oy(x=0)$, то значения функции становятся отрицательными ($z = -y^2$). Таким образом, сколь угодно близко от точки $(0,0)$ существуют точки, в которых значения функции больше значения функции в точке $(0,0)$, а также и точки, в которых значения функции меньше, чем в точке $(0,0)$. Следовательно, в точке $(0,0)$ функция $z = x^2 - y^2$ не имеет экстремума.

Таким образом, системе уравнений (1) могут удовлетворять координаты точек, в которых функция не имеет экстремума.

6.2 Достаточные условия экстремума.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $P_0(x_0, y_0)$. Вычислим в этой точке значения производных второго порядка: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Введем число $\Delta = A^2 - B^2$.

Теорема. 1. Если в стационарной точке $P_0(x_0, y_0)$ выполняется неравенство $\Delta = A^2 - B^2 > 0$, то в этой точке функция имеет экстремум; при этом, если $A > 0$ (и $C > 0$), то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция имеет минимум, а если $A < 0$ (и $C < 0$), то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция имеет максимум.

2. Если в стационарной точке $\Delta = A^2 - B^2 < 0$, то в этой точке функция не имеет экстремума (ни максимума, ни минимума).

3. Если же $\Delta = A^2 - B^2 = 0$, то для выяснения вопроса о поведении функции в стационарной точке необходимо дополнительное исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

Решение:

Находим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad z'_y = 6xy - 36.$$

Согласно необходимым условиям экстремума (формулы (1)), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}.$$

Решаем её:

$$\begin{cases} \left(\frac{6}{y}\right)^2 + y^2 = 13 \\ x = \frac{6}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 13y^2 + 36 = 0 \\ x = \frac{6}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y^2 - 4)(y^2 - 9) = 0 \\ x = \frac{6}{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ y = \pm 3 \\ x = \frac{6}{y} \end{cases}. \text{ Т.е. получили стационарные точки: } (3,2), (-3,-2), (2,3), (-2,-3).$$

Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 6y, \quad z''_{yy} = 6x.$$

Находим значение $\Delta = A \in -B^2$ в каждой точке:

$$1) A = z''_{xx}(3,2) = 18, B = z''_{xy}(3,2) = 12, C = z''_{yy}(3,2) = 18.$$

Тогда $\Delta = 18 - 12^2 = -180 < 0$, т.е. $(3,2)$ - точка экстремума, а именно - минимума, т.к. $A > 0$;

$$2) A = z''_{xx}(-3,-2) = -18, B = z''_{xy}(-3,-2) = -12, C = z''_{yy}(-3,-2) = -18.$$

Тогда $\Delta = -18 - (-12)^2 = -180 < 0$, т.е. $(-3,-2)$ - точка экстремума, а именно - максимума, т.к. $A < 0$;

$$3) A = z''_{xx}(2,3) = 12, B = z''_{xy}(2,3) = 18, C = z''_{yy}(2,3) = 12.$$

Тогда $\Delta = 12 - 18^2 = -324 < 0$, т.е. $(2,3)$ не является точкой экстремума;

$$4) A = z''_{xx}(-2,-3) = -12, B = z''_{xy}(-2,-3) = -18, C = z''_{yy}(-2,-3) = -12.$$

Тогда $\Delta = -12 - (-18)^2 = -324 < 0$, т.е. $(-2,-3)$ не является точкой экстремума.

$$\text{Вывод: } z_{\min} = z(3,2) = -108, \quad z_{\max} = z(-3,-2) = 152.$$

7. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции в ограниченной замкнутой области

Определение. Точка множества называется *внутренней*, если существует окрестность этой точки, состоящая только из точек, принадлежащих этому множеству.

Определение. Точка множества называется *граничной*, если в любой окрестности этой точки, содержатся как точки принадлежащие множеству, так и точки не принадлежащие ему.

Определение. Множество всех граничных точек области называется *границей* этой области.

Определение. *Замкнутым* называют множество, содержащее все свои граничные точки.

Определение. Множество называется *ограниченным*, если существует круг конечного радиуса с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется *неограниченным*.

Например: отрезок и треугольник – ограниченные множества; прямая не является ограниченным множеством.

Перечислим теперь несколько важнейших свойств непрерывных функций двух переменных.

Теорема 1. Функция $z = f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , ограничена в этой области.

Теорема 2. Функция $z = f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , принимает в этой области некоторое наибольшее и некоторое наименьшее значение.

Пусть в ограниченной замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть эта функция принимает в точке (x_0, y_0) области D наибольшее (наименьшее) значение. Если точка (x_0, y_0) – внутренняя точка области D , то в этом случае функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) максимум (минимум). Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция $z = f(x, y)$ может достигать и на границе области (т.е. точка (x_0, y_0) может лежать на одной из линий, ограничивающих область D).

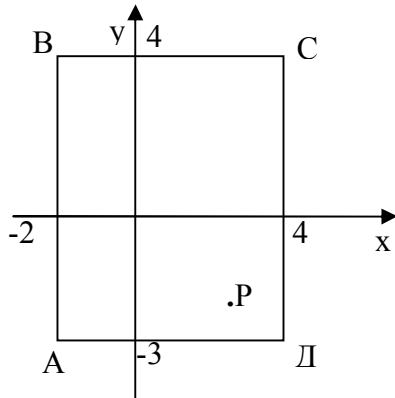
Следовательно, получаем следующее *правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в ограниченной замкнутой области D* :

1. Находим критические точки, лежащие внутри области D . Вычисляем значения функции в этих найденных точках.
2. Находим критические точки, лежащие на границе области D . Вычисляем значения функции в этих найденных точках.

3. Выбираем из всех найденных значений функции в пунктах 1 и 2 наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области D .

Замечание: Решая задачу на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой области, необходимо сделать чертеж области D .

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ в области: $-2 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 4$.



Решение: Данная область представляет собой прямоугольник ABCD.

1) Находим критические точки, используя необходимые условия экстремума:
 $z'_x = 2x - 6$, $z'_y = 2y + 4$.

Решая систему $\begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases}$, находим

критическую точку $P(3, -2)$. Она лежит внутри прямоугольника, поэтому находим значение функции в этой точке:

$$z(P) = z(3, -2) = 3^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = -13.$$

2) Находим критические точки функции на границе области, т.е. на границе прямоугольника, и находим в них значения функции. Рассмотрим 4 случая:

а) Сторона AB прямоугольника ABCD является частью прямой $x = -2$ при $-3 \leq y \leq 4$. Тогда $z_{AA} = (-2)^2 + y^2 - 6 \cdot (-2) + 4y = y^2 + 4y + 16$ есть функция одной переменной y . Находим её критические точки на интервале $y \in (-3, 4)$:

$z'_y = (y^2 + 4y + 16)' = 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2$. Т.к. $y = -2 \in (-3, 4)$, находим значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ в точке $M_1(-2, -2)$:

$$z(M_1) = z(-2, -2) = (-2)^2 + (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = 12.$$

б) Сторона BC прямоугольника ABCD является частью прямой $y = 4$ при $-2 \leq x \leq 4$. Тогда $z_{BN} = x^2 + 4^2 - 6x + 4 \cdot 4 = x^2 - 6x + 32$ есть функция одной переменной x . Находим её критические точки на интервале $x \in (-2, 4)$:

$z'_x = (x^2 - 6x + 32)' = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Т.к. $x = 3 \in (-2, 4)$, находим значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ в точке $M_2(3, 4)$:

$$z(M_2) = z(3, 4) = 3^2 + 4^2 - 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 23.$$

в) Сторона CD прямоугольника ABCD является частью прямой $x = 4$ при $-3 \leq y \leq 4$. Тогда $z_{NA} = 4^2 + y^2 - 6 \cdot 4 + 4y = y^2 + 4y - 8$ есть функция одной

переменной y . Находим её критические точки на интервале $y \in (-3, 4)$:

$z'_y = (y^2 + 4y - 8)' = 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2$. Т.к. $y = -2 \in (-3, 4)$, находим значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ в точке $M_3(4, -2)$:
 $z(M_3) = z(4, -2) = 4^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = -12$.

г) Сторона АД прямоугольника ABCD является частью прямой $y = -3$ при $-2 \leq x \leq 4$. Тогда $z_{\bar{A}\bar{D}} = x^2 + (-3)^2 - 6x + 4 \cdot (-3) = x^2 - 6x - 3$ есть функция одной переменной x . Находим её критические точки на интервале $x \in (-2, 4)$:

$z'_x = (x^2 - 6x - 3)' = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Т.к. $x = 3 \in (-2, 4)$, находим значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ в точке $M_4(3, -3)$:
 $z(M_4) = z(3, -3) = 3^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) = -12$.

д) Находим значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ в вершинах прямоугольника ABCD:

$$z(A) = z(-2, -3) = (-2)^2 + (-3)^2 - 6 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) = 13;$$

$$z(B) = z(-2, 4) = (-2)^2 + 4^2 - 6 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 = 48;$$

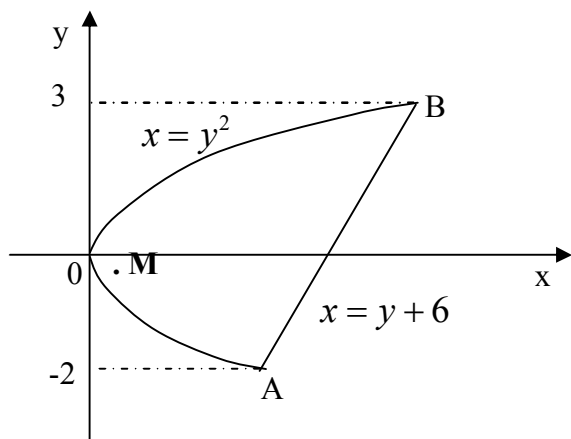
$$z(C) = z(4, 4) = 4^2 + 4^2 - 6 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 24;$$

$$z(\bar{A}) = z(4, -3) = 4^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -11.$$

3) Среди найденных в пунктах 1) и 2) значений функции в точках $P, M_1, M_2, M_3, M_4, A, B, C, \bar{A}$ выбираем наибольшее и наименьшее значения:
 $z_{\max} = z(B) = z(-2, 4) = 48$ и $z_{\min} = z(\bar{A}) = z(4, -3) = -11$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6xy - y^2 + 3x$ в области ограниченной параболой $x = y^2$ и прямой $y = x - 6$.

Решение: Найдем ординаты точек пересечения параболы $x = y^2$ и прямой $y = x - 6$, решив уравнение $y^2 = y + 6$. Получаем точки $y_1 = -2, y_2 = 3$. Изображаем область.



1) Находим критические точки:

$$z'_x = 6y + 3, \quad z'_y = 6x - 2y.$$

$$\text{Решая систему } \begin{cases} 6y + 3 = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

находим критическую точку $P\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$.

Она не лежит внутри рассматриваемой области, следовательно, не подлежит исследованию.

2) Исследуем на границе:

а) Рассматриваем часть параболы $x = y^2$ на $y \in (-2, 3)$:

$$z(y) = 6y^3 - y^2 + 3y^2 = 6y^3 + 2y^2;$$

$$z'(y) = (6y^3 + 2y^2)' = 18y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0, y_2 = -\frac{2}{9}.$$

Тогда $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{81}$. Получили две точки: $O(0, 0)$ и $M\left(\frac{4}{81}, -\frac{2}{9}\right)$.

Значения функции в этих точках: $z(0, 0) = 0, z\left(\frac{4}{81}, -\frac{2}{9}\right) = \frac{8}{243}$.

б) Рассматриваем часть прямой $x = y + 6$ на $y \in (-2, 3)$:

$$z(y) = 6(y + 6)y - y^2 + 3(y + 6) = 5y^2 + 39y + 18;$$

$$z'(y) = (5y^2 + 39y + 18)' = 10y + 39 = 0 \Leftrightarrow y = -3,9 \notin (-2, 3).$$

Значит

критических точек на рассматриваемой части прямой $x = y + 6$ нет.

в) Находим значения функции $z = 6xy - y^2 + 3x$ в точках $A(4, -2)$ и $B(9, 3)$: $z(A) = z(4, -2) = -48 - 4 + 12 = -40$; $z(B) = z(9, 3) = 162 - 9 + 27 = 180$.

3) Сравнивая найденные значения функции в точках O, M, A, B , делаем вывод: $z_{\min} = z(B) = 180$ и $z_{\max} = z(A) = -40$.

8. Контрольные вопросы и типовые задачи

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок:

1. Функция нескольких переменных, область определения функции. График функции двух переменных, линии и поверхности уровня.
2. Частные производные 1-го порядка функции. Частные производные высших порядков функции.
3. неявно заданная функция. Производные неявно заданных функций одной и двух переменных.
4. Полный дифференциал 1-го и 2-го порядка функции. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала 1-го порядка.
5. Градиент функции. Производная функции по направлению.
6. Геометрические приложения частных производных.
7. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.
8. Наибольшее и наименьшее значения функции. Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции в ограниченной замкнутой области.

Студент должен уметь:

1. Находить и изображать область определения функций двух и трех переменных.
2. Находить и изобразить линии уровня для функций двух переменных и поверхности уровня для функций трех переменных.
3. Находить частные производные 1-го и высших порядков явно заданных функций двух и трех переменных.
4. Находить производную неявно заданной функции $F(x, y) = 0$ и частные производные 1-го порядка неявно заданной функции $F(x, y, z) = 0$.
5. Находить полные дифференциалы 1-го и 2-го порядка функции двух переменных.
6. Находить полный дифференциал 1-го порядка функции трех переменных.
7. Применять полный дифференциал 1-го порядка функции к приближенным вычислениям значений функций.
8. Находить градиент функции.
9. Находить производную функции в данном направлении и наибольшую скорость изменения функции в точке.
10. Находить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
11. Исследовать функцию двух переменных на экстремум.
12. Находить наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции двух переменных в ограниченной замкнутой области.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найти и изобразить области определения функций:

$$a) z = 3x^2 + \sqrt{y-2}; \quad б) z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}; \quad в) z = \arcsin(y-x);$$

$$г) u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 3).$$

2. Найти и изобразить линии уровня или поверхности уровня функций:

$$a) z = \sqrt{1-x^2-y^2}; \quad б) z = \frac{1}{x^2+y^2}; \quad в) z = 16x^2 - 9y^2; \quad г) u = x^2 + y^2 - z.$$

3. Найти частные производные 1-го порядка функций:

$$a) z = x^3 + 3x^2y^6 - y^5; \quad б) z = \cos(2x^2 - 3y); \quad в) z = \frac{e^{2x+y}}{y}; \quad г) u = e^{x^2yz}.$$

4. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ неявных функций, заданных уравнениями:

$$a) x^2 - 2xy + 1 = 0; \quad б) xe^{2y} - y = 8.$$

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для функций, заданных неявно:

$$a) x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad б) z^3 + 3xyz = 0.$$

6. Дана функция $z = x \ln \frac{y}{x}$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

7. Показать, что функция $z = x^2 - y^2 + 2xy$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

8. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядка функций двух переменных:

$$a) z = x^3 + y^4 - xy + 3; \quad б) z = ye^{y-x}; \quad в) z = \frac{2x-y}{2x+y}.$$

9. Найти полные дифференциалы 1-го порядка функций трех переменных:

$$a) u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z; \quad б) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

10. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала 1-го порядка:

$$a) \sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}; \quad б) \sin 28^\circ \cos 61^\circ.$$

11. Найти градиент и наибольшую скорость изменения функций в точке A :

$$a) z = (x^2y - 2y)^4, \quad A(-1;1); \quad б) u = xy^2z + yz^2 - 3z, \quad A(0;1;2)$$

12. Найти производные функций в точке M по направлению к точке N :

$$a) z = x^3 - 2xy^2 + x^2y - 3, \quad M(1;2), \quad N(4;6);$$

$$б) u = xy - yz + 2xz, \quad M(2;0;-1), \quad N(6;6;1).$$

13. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $A(1;-2;5)$.

14. Исследовать на экстремум функции двух переменных:

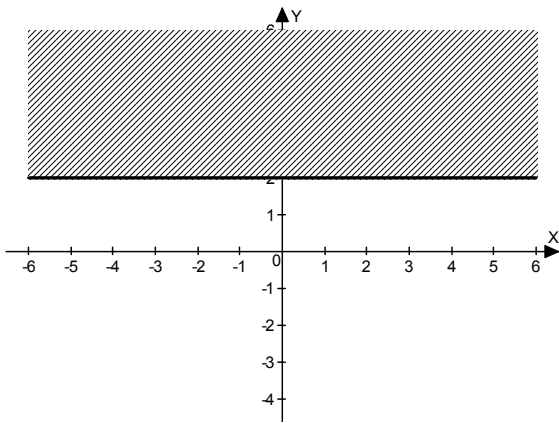
а) $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$; б) $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 10$.

15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных $z = x^2 + y^2 - 3xy$ в области $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.

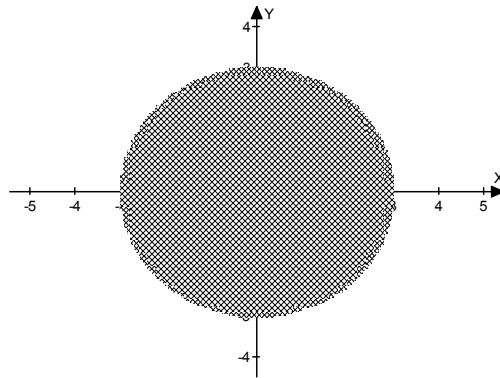
ОТВЕТЫ

1.

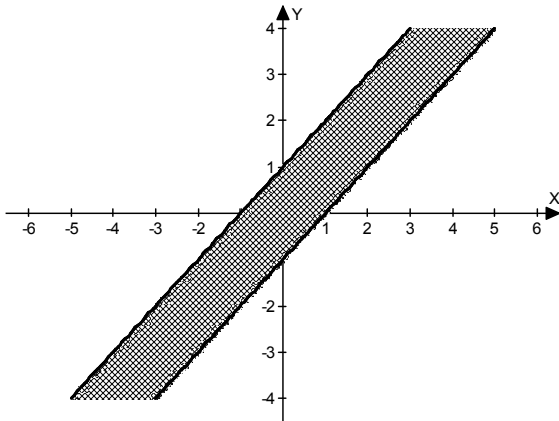
а)



б)



в)



г) внешняя часть шара $x^2 + y^2 + z^2 > 3$ с центром $(0;0;0)$ радиуса $R = \sqrt{3}$. 2.

а) При $c \in [0;1)$ – окружности $x^2 + y^2 = 1 - c^2$, при $c = 1$ – точка $O(0;0)$; б) при $c > 0$ – окружности $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$; в) при $c \neq 0$ – гиперболы

$16x^2 - 9y^2 = c$, при $c = 0$ – пара прямых $y = \pm \frac{4}{3}x$; г) при $c \in \mathbf{R}$ – параболоиды

вращения $z = x^2 + y^2 - c$ с осью Oz . 3. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^6$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 18x^2y^5 - 5y^4$; б)

$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x \sin(2x^2 - 3y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \sin(2x^2 - 3y)$; в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x+y}}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{2x+y}(y-1)}{y^2}$; г)

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyze^{x^2yz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2ze^{x^2yz}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x^2ye^{x^2yz}$. 4. а) $1 - \frac{y}{x}$; б) $\frac{e^{2x+y}}{1 - 2xe^{2y}}$. 5. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{z^2 + 3xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{z^2 + 3xy}$. 6. $-\frac{1}{y^2}$. 8. а) $dz =$

$$\begin{aligned}
&= (3x^2 - y)dx + (4y^3 - x)dy, \quad d^2z = 6x dx^2 - 2dxdy + 12y^2 dy^2; \quad \text{б)} \quad dz = -ye^{y-x}dx + \\
&+ e^{y-x}(1+y)dy, \quad d^2z = ye^{y-x}dx^2 - 2e^{y-x}(1+y)dxdy + e^{y-x}(y+2)dy^2; \quad \text{в)} \quad dz = \\
&= \frac{4(ydx - xdy)}{(2x+y)^2}, \quad d^2z = -\frac{16y}{(2x+y)^3}dx^2 + \frac{8x-4y}{(2x+y)^3}dxdy + \frac{8x}{(2x+y)^3}dy^2. \quad \mathbf{9.} \quad \text{а)} \\
&(3x^2 + 3y - 1)dx + (3x + z^2)dy + (2yz + 1)dz; \quad \text{б)} \quad \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad \mathbf{10.} \quad \text{а)} \quad 2,953; \quad \text{б)} \\
&0,227. \quad \mathbf{11.} \quad \text{а)} \quad 8\vec{i} + 4\vec{j}, \quad 4\sqrt{5}; \quad \text{б)} \quad 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \quad \sqrt{21}. \quad \mathbf{12.} \quad \text{а)} \quad -6,2; \quad \text{б)} \quad \frac{9}{\sqrt{14}}. \quad \mathbf{13.} \quad 2x - \\
&-4y - z - 5 \quad 0, \quad \frac{x-1}{2} \quad \frac{y+2}{-4} \quad \frac{z-5}{-1}. \quad \mathbf{14.} \quad \text{а)} \quad f_{\min} = f(1;0) = 0; \quad \text{б)} \quad f_{\min} = f(6;6) = \\
&= -422. \quad \mathbf{15.} \quad z_{\text{наиб}} = z(2; -1) = 1, \quad z_{\text{наим}} = z(2; 2) = -4.
\end{aligned}$$