Лекция 1

Перечень рекомендуемой литературы

Основная

	Автор	Название	Издательство	Год издания
1	Гаврилов, Г. П.	Задачи и упражнения по дискретной математике	М.: Физматлит	2005-2012
2	Горбатов, В. А.	Дискретная математика: Учеб. для студ. втузов	М.: АСТ: Астрель	2006-2011
4	Кузнецов, О. П.	Дискретная математика для инженера	М.: Лань, 3-е изд., перераб. и доп. 400с.	2004-2010
5	Тишин, В.В.	Дискретная математика в примерах и задачах: учеб. пособие	СПб.: БХВ-Петербург, 337 с.	2008
6	Фомичев, В. М.	Дискретная математика и криптология: Курс лекций	М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 400с.	2006-2010
7	Асанов, М. О.	**Дискретная математика**. Графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие	СПб.; М.; Краснодар: Лань, 362 с.	2010
8	Иванов, Б. Н.	**Дискретная математика**. Алгоритмы и программы [Текст]: расширенный курс: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика	Москва: Известия, 509 с.	2011
9	Яблонский, С. В.	Введение в дискретную математику	М.: Высш. шк.	2006-2011

Дополнительная

	Автор	Название	Издательство	Год издания
8	Акимов, О. Е.	Дискретная математика: логика, группы, графы	М.: Лаборатория Базовых Знаний	2006-2009

9	Аттетков, А. В.	Методы оптимизации: Учеб.	М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана	2001
11	Белоусов, А. И.	Дискретная математика: Учеб.	М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана	2004
12	Вентцель, Е. С.	Исследование операций. Задачи, принципы, методология: Учеб. пос	М.: Высш. шк.	2004
13	Волков, Игорь Куприянович	Исследование операций: Учеб.	М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана	2000
14	Карпов, Ю. Г.	Теория автоматов: Учеб. для вузов	М.: Питер	2003 2002
15	Лавров, И. А.	Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов	М.: ФИЗМАТЛИТ	2002
16	Макконелл, Дж.	Анализ алгоритмов	М.: Техносфера, 304 с.	2002
17	Новиков, Ф. А.	Дискретная математика для программистов: Учеб. пособие	М.: Питер, 304 с.	2003
18		Программирование алгоритмов защиты информации: Учеб. пособие	М.: Нолидж, 288с.	2000
19	Романовский, И. В.	Дискретный анализ: Учеб. пособие	СПб.; М.: ФИЗМАТЛИТ: Невский диалект: Лаборатория Базовых Знаний, 240 с.	2001
20	Судоплатов, С. В.	Элементы дискретной математики: Учеб.	М.; Новосибирск: ИНФРА-М: НГТУ, 280 с.	2002
21		Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов: Учеб. пособие	М., МФТИ, 100 с.	2000
22	Хаггарти, Р.	Дискретная математика для программистов: Учеб. пособие	М.: Техносфера, 320	2003
23	Шалыто, А. А.	Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов	СПб.: Наука, 780с.	2000
24	Шапорев, С. Д.	Дискретная математика: Курс лекций и практических занятий	СПб.: БХВ-Петербург, 2006. - 400с.	2007 2006
Методическая				

25	Прозоров, Д. Е., Наумович, Т. В.	Дискретная математика: Метод. указания к практическим занятиям.	ВятГУ, ФПМТ, каф. РЭС. - Киров, 2006. – 20с.	2006
26	Наумович, Т. В.	Элементы теории множеств, математической логики и теории графов: учебно-метод. пособие для студентов специальности 090302.65 и направлений 090900.62.01, 210700.62 всех профилей подготовки, всех форм обучения	ВятГУ, ФПМТ, каф. РЭС. - Киров: 2014. - 60 с.	
Периодические издания				
27	.	Дискретная математика	М.: РАН. Наука, ISSN 0234-0860	2002 - 2009

Элементы теории множеств

Множества

Наиболее простая структура данных, используемая в математике, имеет место в случае, когда между отдельными изолированными данными отсутствуют какие-либо взаимосвязи. Совокупность таких данных представляет собой ***множество***. Понятие множества является неопределяемым понятием.

Георг Кантор выразил понятие множества следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое целое».

Множество не обладает внутренней структурой. Множество можно представить как совокупность элементов, обладающих некоторым общим свойством. Для того чтобы некоторую совокупность элементов можно было назвать множеством, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Должно существовать правило, позволяющее определить, принадлежит ли указанный элемент данной совокупности.
2. Должно существовать правило, позволяющее отличать элементы друг от друга. (Это, в частности, означает, что множество не может содержать двух ***одинаковых*** элементов).

Множества обычно обозначаются заглавными латинскими буквами. Если элемент $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$, то это обозначается:

$$x \in A$$

Множество может содержать объекты любой природы, например:

множество левых ботинок;
множество натуральных чисел;
множество зарезервированных слов языка С;
множество операций в программе.

Если каждый элемент множества ***B*** является также и элементом множества ***A***, то говорят, что множество ***B*** является ***подмножеством*** множества ***A***:

$$B \subset A$$

Подмножество ***B*** множества ***A*** называется ***собственным подмножеством***, если

$$B \neq A$$

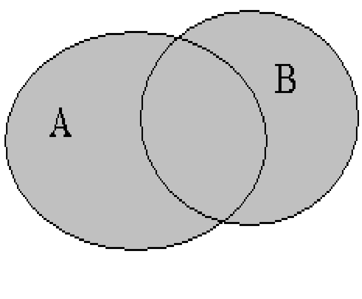
Используя понятие множества можно построить более сложные и содержательные объекты.

Универсальным способом задания множества является способ задания характеристических свойств элементов этого множества: $\underset{x}{M}\left[P(x)\right]$ – множество всех таких x, что x обладает свойством P.

Операции над множествами

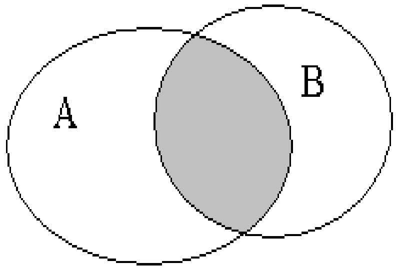
Основными операциями над множествами являются ***объединение***, ***пересечение*** и ***разность***.

Определение 1. ***Объединением*** двух множеств называется новое множество



$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Определение 2. ***Пересечением*** двух множеств называется новое множество



$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

В англоязычной научной литературе знаки $\bigcup$ и $\bigcap$ часто называют cup – чашка – и cap – шапка.

Определение 3. ***Разностью*** двух множеств называется новое множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Если класс объектов, на которых определяются различные множества обозначить Ω (***Универсум***), то ***дополнением*** множества A называют разность

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

Пример множества

Множество Мандельброта

Множество Мандельброта — это множество таких точек c на комплексной плоскости, для которых итеративная последовательность $z_0=0$, $z_n=z_{n-1}^2+c$ (n=1, 2, 3, …) не уходит в бесконечность. То есть, это множество таких c, для которых существует действительное R, что неравенство $|z_n|<R$ выполняется при всех натуральных n.

Множество Мандельброта является в некотором смысле фракталом

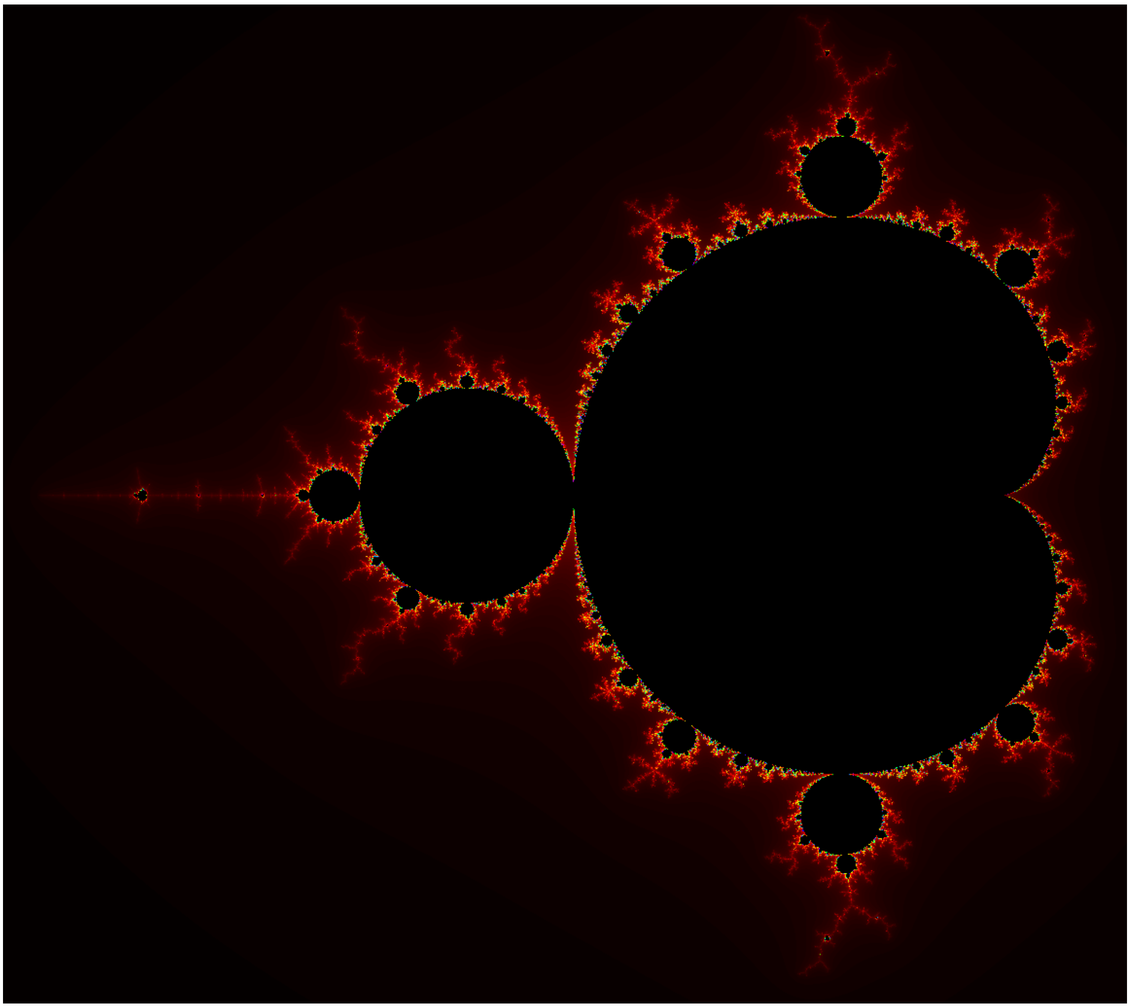


Рисунок 1 - Визуализация множества Мандельброта

Декартово произведение множеств

Одним из способов конструирования новых объектов из уже имеющихся множеств является ***декартово произведение множеств***.

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$- множества. Выражение вида ***(a, b)***, где $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$, называется ***упорядоченной парой***.

Равенство вида $(a, b) = (c, d)$ означает, что $a = c$ и $b = d$.

В общем случае, можно рассматривать ***упорядоченную n-ку*** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из элементов $a_1 \in A, \ldots, a_n$. Упорядоченные n-ки иначе называют ***наборы*** или ***кортежи***.

Определение 4. ***Декартовым (прямым) произведением множеств***

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество упорядоченных n-ок (наборов, кортежей) вида

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

По имени Рене Декарта (1596-1650), знаменитого французского математика и философа (декартовы координаты).

Определение 5. ***Степенью декартового произведения*** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется число множеств n, входящих в это декартово произведение.

Замечание. Если все множества A_i одинаковы, то используют обозначение

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

Пример: Представить следующие наборы как диаграммы Венна, а затем найти A ∩ B ∩ C, A ∪ B, (A ∩ B ∩ C), (A ∪ B).

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

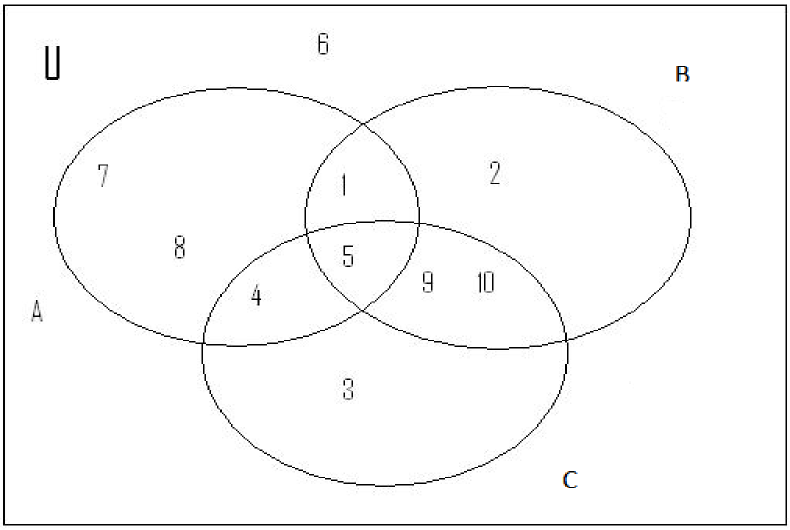
A = {1, 4, 5, 7, 8}

B = {1, 2, 5, 9, 10}

C = {3, 4, 5, 9, 10}

Решение:

Диаграммы Венна, представляющие множества U, A, B и C:



$$A \cap B \cap C = \{5\}$$

Отношение

***Определение 6*. Подмножество *R* декартового произведения множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *отношением степени n* (*n-арным отношением*).**

***Определение 7*. Мощность множества кортежей, входящих в отношение *R*, называют *мощностью отношения R*.**

Замечание. Понятие отношения является очень важным не только с математической точки зрения. Понятие отношения фактически лежит в основе всей реляционной теории баз данных. Вообще говоря, отношения являются математическим аналогом ***таблиц***. Сам термин "реляционное представление данных", впервые введенный Коддом, происходит от термина *relation*, понимаемом именно в смысле этого определения.

Т.к. любое множество можно рассматривать как декартовое произведение степени 1, то любое подмножество, как и любое множество, можно считать отношением степени 1. Это не очень интересный пример, свидетельствующий лишь о том, что термины "отношение степени 1" и "подмножество" являются синонимами. Нетривиальность понятия отношения проявляется, когда степень отношения больше 1. Ключевыми здесь являются два момента:

Во-первых, все элементы отношения есть *однотипные* кортежи. Однотипность кортежей позволяет считать их аналогами строк в простой таблице, т.е. в такой таблице, в которой все строки состоят из одинакового числа ячеек и в соответствующих ячейках содержатся одинаковые типы данных.

Например, отношение, состоящее из трех следующих кортежей {(1, "Иванов", 10000), (2, "Петров", 20000), (3, "Сидоров", 30000)} можно считать таблицей, содержащей данные о сотрудниках и их зарплатах. Такая таблица будет иметь три строки и три колонки, причем в каждой колонке содержатся данные одного типа.

В противоположность этому рассмотрим множество {(1), (1, 2), (1, 2, 3)}, состоящее из *разнотипных* числовых кортежей. Это множество не является отношением ни в R, ни в R^2, ни в R^3. Из кортежей, входящих в это множество нельзя составить простую таблицу. Правда, можно считать это множество отношением степени 1 на множестве всех возможных числовых кортежей всех возможных степеней

$$\Omega = \mathrm{R} \cup \mathrm{R}^2 \cup \mathrm{R}^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{R}^k ,$$

но такая трактовка ничего нового, по сравнению с понятием подмножества, не дает.

Во-вторых. За исключением крайнего случая, когда отношение есть само декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, отношение включает в себя *не все возможные кортежи* из декартового произведения. Это значит, что для каждого отношения имеется *критерий*, позволяющий определить, какие кортежи входят в отношение, а какие - нет. Этот критерий, по существу, определяет для нас *смысл (семантику)* отношения.

Действительно, каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящее от n параметров (n-местный предикат) и определяющее, будет ли кортеж $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ принадлежать отношению R. Это логическое выражение называют ***предикатом отношения R***. Более точно, кортеж $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ принадлежит отношению ***R*** тогда и только тогда, когда предикат этого отношения $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принимает значение "истина". В свою очередь, каждый n-местный предикат задает некоторое n-арное отношение. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между n-арными отношениями и n-местными предикатами.

Если это не вызывает путаницы, удобно и отношение, и его предикат обозначать одной и той же буквой. Например, отношение ***R*** имеет предикат $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Лекция 2

Примеры отношений
Бинарные отношения (отношения степени 2)

В математике большую роль играют бинарные отношения, т.е. отношения, заданные на декартовом произведении двух множеств A^1xA^2.

Отношение эквивалентности

Определение 8. Отношение R на множестве A^2 называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает следующими свойствами:

1. $(x,x)\in R$ для всех $x\in A$ (рефлексивность)
2. Если $(x,y)\in R$, то $(y,x)\in R$ (симметричность)
3. Если $(x,y)\in R$ и $(y,z)\in R$, то $(x,z)\in R$ (транзитивность)

Обычно отношение эквивалентности обозначают знаком "=" или "≈" и говорят, что оно (отношение) задано на множестве A (а не на A^2). Условия 1-3 в таких обозначениях выглядят более естественно:

1. $x \approx x$ для всех $x\in A$ (рефлексивность)
2. Если $x\approx y$, то $y\approx x$ (симметричность)
3. Если $x\approx y$ и $y\approx z$, то $x\approx z$ (транзитивность)

Легко доказывается, что если на множестве A задано отношение эквивалентности, то множество A разбивается на взаимно непересекающиеся подмножества, состоящие из эквивалентных друг другу элементов (***классы эквивалентности***).

<u>Пример 1</u>. Рассмотрим на множестве вещественных чисел R отношение, заданное просто равенством чисел. Предикат такого отношения:

$$R(x,y)=\begin{cases}\text{"истина"}, \text{если } x=y\\ \text{"ложь"}, \text{если } x\neq y\end{cases}$$, или просто $x=y$

Условия 1-3, очевидно, выполняются, поэтому данное отношение является отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности этого отношения состоит из одного числа.

Пример 2. Рассмотрим более сложное отношение эквивалентности. На множестве целых чисел $\mathbf{Z}$ зададим отношение "равенство по модулю n" следующим образом: два числа a и b ***равны по модулю n***, если их остатки при делении на n равны. Например, по модулю 5 равны числа 2, 7, 12 и т.д.

Условия 1-3 легко проверяются, поэтому равенство по модулю является отношением эквивалентности. Предикат этого отношения имеет вид:

$$R(x,y) = \begin{cases} \text{"}\textit{истина}\text{"}, \textit{ если } x = y \bmod n \\ \text{"}\textit{ложь}\text{"}, \textit{ если } x \neq y \bmod n \end{cases}$$

Классы эквивалентности этого отношения состоят из чисел, дающих при делении на n одинаковые остатки. Таких классов ровно n:

[0] = {0, n, 2n, …}
[1] = {1, n+1, 2n+1, …}
…
[n-1] = {n-1, n+n-1, 2n+n-1, …}

Параллельные прямые

Отношения порядка

Определение 9. Отношение $\boldsymbol{R}$ на множестве $\boldsymbol{A}^2$ называется ***отношением порядка***, если оно обладает следующими свойствами:

1. $(x,x) \in R$ для всех $x \in A$ (рефлексивность)
2. Если $(x,y) \in R$ и $(y,x) \in R$, то $x = y$ (антисимметричность)
3. Если $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R$, то $(x,z) \in R$ (транзитивность)

Обычно отношение порядка обозначают знаком "$\leq$". Если для двух элементов x и y выполняется $x \leq y$, то говорят, что x "предшествует" y. Как и для отношения эквивалентности, условия 1-3 в таких обозначениях выглядят более естественно:

1. $x \leq x$ для всех $x \in A$ (рефлексивность)
2. Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (антисимметричность)
3. Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзитивность)

Пример 3. Простым примером отношения порядка является отношение, задаваемое обычным неравенством "$\leq$" на множестве вещественных чисел $\mathbf{R}$. Заметим, что *для любых чисел* x и y выполняется либо $x \leq y$, либо $y \leq x$, т.е. *любые* два числа сравнимы между собой. Такие отношения называются ***отношениями полного порядка***.

Предикат данного отношения есть просто утверждение $x \le y$.

<u>Пример 4</u>. Рассмотрим на множестве A всех сотрудников некоторого предприятия отношение, задаваемое следующим образом: сотрудник x предшествует сотруднику y тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- $x = y$
- x является начальником (не обязательно непосредственным) y

Назовем такое отношение "быть начальником". Легко проверить, что отношение "быть начальником" является отношением порядка. Заметим, что в отличие от предыдущего примера, *существуют такие пары* сотрудников x и y, для которых не выполняется ни $x \le y$, ни $y \le x$ (например, если x и y являются сослуживцами). Такие отношения, в которых есть несравнимые между собой элементы, называют ***отношениями частичного порядка***.

Функциональное отношение

Определение 10. Отношение ***R*** на декартовом произведении двух множеств $A_1 \times A_2$ называется ***функциональным отношением***, если оно обладает следующим свойством:

1. Если $(x,y) \in R$ и $(x,z) \in R$, то $y = z$ (однозначность функции).

Обычно, функциональное отношение обозначают в виде ***функциональной зависимости*** - $(x,y) \in R$ тогда и только тогда, когда ***y=f(x)***.

Функциональные отношения (подмножества декартового произведения!) называют иначе ***графиком функции*** или ***графиком функциональной зависимости***.

Предикат функционального отношения есть просто выражение функциональной зависимости $y = f(x)$.

Бинарное отношение может быть задано следующими способами.

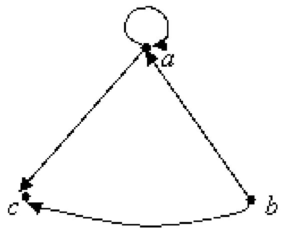
1. ***График бинарного отношения***. Если множество A конечно, то график

Г– это список пар из множества A^2, в которых элементы соединены отношением. Если A – это часть числовой оси или вся ось, то график может быть представлен геометрически в системе координат.

2. ***Характеристическое свойство бинарного отношения***. Характеристическое свойство – это свойство, определяющее характер связи между эле-

ментами в парах. Для обозначения характеристического свойства употребляется символ "**R**". Например, *a R b*: "*a* старше *b*" (на множестве людей),

a R b: "$a^2+b^2=1$" (на множестве чисел) и т.п.



Граф бинарного отношения $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}$ на множестве $A=\{a,b,c\}$

2. *Граф бинарного отношения*. Граф бинарного отношения – это чертеж, состоящий из точек (вершин графа) и направленных отрезков или дуг (ребер графа). Вершины графа отношенуют элементам множества A. Ребра графа соединяют элементы множества A с их образами. Например, граф бинарного отношения

   $\Gamma=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,c)\}$ на множестве $A=\{a,b,c\}$ будет выглядеть так (рис.).

4. *Характеристическая функция.* Характеристическая функция $\mu(x,y)$ бинарного отношения Γ на множестве A – это функция от двух аргументов x и y $(x,y\in A)$ такая, что

$$\mu(x,y)=\begin{cases}1, & если \quad (x,y)\in\Gamma\\ 0, & если \quad (x,y)\notin\Gamma\end{cases} \tag{2.1}$$

Например, характеристическую функцию отношения Γ (см. рис) можно записать в виде таблицы:

$\mu(a,a)$	$\mu(a,b)$	$\mu(a,c)$	$\mu(b,a)$	$\mu(b,b)$	$\mu(b,c)$	$\mu(c,a)$	$\mu(c,b)$	$\mu(c,c)$
1	0	1	1	0	1	0	0	0

Значение характеристической функции $\mu_\Gamma(a_i,a_j)=1$, если высказывание $(a_i,a_j)\in\Gamma$ истинно, и $\mu_\Gamma(a_i,a_j)=0$, если это высказывание ложно.

Используя термины "истина" и "ложь" характеристическую функцию можно записать следующим образом:

$$\mu(x,y)=\begin{cases}\text{истина}, & \text{если} \quad (x,y)\in\Gamma\\ \text{ложь}, & \text{если} \quad (x,y)\notin\Gamma\end{cases} \tag{2.2}$$

Характеристическую функцию бинарного отношения удобно записывать в виде *матрицы бинарного отношения*.

Определение. ***Матрицей бинарного отношения*** Γ на множестве A, содержащем n элементов, называют квадратную матрицу $J_\Gamma=(x_{ij})$ порядка n, элементы которой $x_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n)$ имеют значения:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad (a_i,a_j)\in\Gamma\\ 0, & \text{если} \quad (a_i,a_j)\notin\Gamma\end{cases} \qquad (a_i,a_j\in A) \tag{2.3}$$

Примечание. В теории графов матрицу бинарного отношения называют ***матрицей инциденций***.

Матрица отношения Γ (рис.) – это матрица $J_\Gamma=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

С точки зрения реляционных баз данных наиболее предпочтительным является представление с помощью таблицы, т.к. оно допускает наиболее удобный способ хранения и манипулирования информацией.

Действительно, перечисление фактов как текстовая форма хранения информации уместна для литературного произведения, но с трудом поддается алгоритмической обработке.

Изображение в виде графа наглядно, и его удобно использовать как конечную форму представления информации для пользователя, но хранить данные в графическом виде неудобно.

Матрица взаимоотношений уже больше соответствует требованиям информационной системы. Матрица удобна в обработке и компактно хранится. Но одно небольшое изменение требует перестройки *всей* матрицы, а именно, добавления *и колонок, и столбцов*.

Таблица фактов свободна от всех этих недостатков - при добавлении новых действующих лиц просто добавляются новые строки.

Лекция 3

Логика

Чем занимается математическая логика?

Логика как искусство рассуждений зародилась в глубокой древности. Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Прошло два тысячелетия, прежде чем Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений.

Эту идею реализовал в XIX Джорж Буль и тем самым заложил основы ***математической (символической логики)***.

Главная цель применения в логике математической символики заключалась в том, чтобы свести операции с логическими заключениями к формальным действиям над символами. При этом исходные положения записываются формулами, которые преобразуются по определенным законам, а полученные результаты истолковываются в соответствующих понятиях.

Бурное развитие математической логики связано, прежде всего, с задачами обоснования математики, где она используется для доказательства непротиворечивости исходных понятий и правильности рассуждений и выводов математических теорий. Некоторые ученые даже склонны рассматривать логику как одну из наиболее общих наук, частью которой является сама математика.

Логика находит все более широкое применение в технике при исследовании и разработке логических схем, вычислительных машин, дискретных автоматов. Её методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика внедряется в такие нематематические области, как экономика, биология, медицина, психология, языкознание, право. Интенсивно развиваются специальные разделы математической логики, призванные обслуживать конкретные области науки и техники.

Столь энергичный выход математической логики за пределы математики объясняется тем, что ее аппарат легко распространяется на объекты самой общей природы, лишь бы только они характеризовались конечным числом состояний.

Двузначная логика имеет дело с такими объектами, которые принимают одно из двух возможных значений (истинное или ложное высказывание, высокое или низкое напряжение, наличие или отсутствие заданного признака у объекта и т. п.).

Объекты, которые могут принимать значения из конечного множества, содержащего больше двух элементов, называют ***многозначными***. Они либо сводятся каким-нибудь способом к двузначным объектам, либо обслуживаются аппаратом ***многозначной логики***.

Устоявшееся представление о математической логике как науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а её главная задача – структурное моделирование таких систем.

Булевы функции

Объекты с двумя возможными состояниями характеризуются ***булевыми переменными,*** которые способны принимать лишь два различных значения. Для обозначения этих двух значений обычно используются цифры **0** или **1** или буквы **F**(false – ложно) и **T**(true – истинно).

Отношения между булевыми переменными представляются ***булевыми функциями***, которые подобно числовым функциям могут зависеть от одной, двух и, вообще, **n** переменных (аргументов).

Запись $y = f(x_1, x_2,, \ldots, x_n)$ обозначает, что

y – функция аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Важнейшая особенность булевых функций состоит в том, что они, как и их аргументы, принимают свои значения из двухэлементного множества **[0, 1]**, или **[F, T]**, т. е. характеризуются одним из двух возможных состояний.

Функции небольшого числа переменных можно задавать с помощью таблиц. Для этого нужно только указать значения функции для каждой комбинации ее значений. Основными в двузначной логике являются следующие три функции:

Отрицание, дизъюнкция, конъюнкция.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ФОРМУЛЫ

Булевы функции можно рассматривать как ***логические операции*** над величинами, принимающими два значения – **0** и **1**. Отрицание – это одноместная операция, а дизъюнкция и конъюнкция – ***двуместные операции***. При этом выражения $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \wedge y$ являются ***логическими формулами.***

Логика

Булевы функции

Объекты с двумя возможными состояниями характеризуются ***булевыми переменными,*** которые способны принимать лишь два различных значения. Для обозначения этих двух значений обычно используются цифры **0** или **1** или буквы **F**(false – ложно) и **T**(true – истинно).

Отношения между булевыми переменными представляются ***булевыми функциями***, которые подобно числовым функциям могут зависеть от одной, двух и, вообще, **n** переменных (аргументов).

Запись $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначает, что y – функция аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Важнейшая особенность булевых функций состоит в том, что они, как и их аргументы, принимают свои значения из двухэлементного множества **[0, 1]**, или **[F, T]**, т. е. характеризуются одним из двух возможных состояний.

Функции небольшого числа переменных можно задавать с помощью таблиц. Для этого нужно только указать значения функции для каждой комбинации ее значений. Основными в двузначной логике являются следующие три функции:

Отрицание, дизъюнкция, конъюнкция.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ФОРМУЛЫ

Булевы функции можно рассматривать как ***логические операции*** над величинами, принимающими два значения – **0** и **1**. Отрицание – это одноместная операция, а дизъюнкция и конъюнкция – ***двуместные операции***. При этом выражения $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \wedge y$ являются ***логическими формулами.***

Две функции считаются ***равносильными***, если при любых значениях аргументов эти функции принимают одинаковые значения. Например,

$$(x \wedge y) \vee z = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \vee z .$$

Равносильность функций проверяется по таблицам основных операций, причем необходимо сравнить их значения для всех комбинаций значений переменных.

Всего имеется 16 функций двух независимых переменных:

	x: 0 1 0 1	Условное обозначение	Название
	y: 0 0 1 1		
0	0 0 0 0	“0”	Константа **0**
1	0 0 0 1	xy; “$\wedge$”; $(\cdot)$	Конъюнкция (И)
2	0 0 1 0	$\bar{x}y$; $x \leftarrow y$	Запрет **x**
3	0 0 1 1	Y	Переменная "**y**"
4	0 1 0 0	$x\bar{y}$; $y \leftarrow x$	**Запрет y**
5	0 1 0 1	X	Переменная **x**
6	0 1 1 0	$x \oplus y$	Исключающее **ИЛИ**
7	0 1 1 1	“$\vee$”; +	Дизъюнкция (**ИЛИ**)
8	1 0 0 0	$x \downarrow y$; $\overline{x+y}$	Стрелка Пирса (**ИЛИ-НЕ**)
9	1 0 0 1	$x \equiv y$; $x \sim y$	Равнозначность

10	1 0 1 0	$\bar{x}$	Инверсия **x**
11	1 0 1 1	$x \to y$; $\bar{x} + y$	Импликация от **x** к **y**
12	1 1 0 0	$\bar{y}$	Инверсия **y**
13	1 1 0 1	$y \to x$; $\bar{y} + x$	Импликация от **y** к **x**
14	1 1 1 0	$x \vert y$; $\overline{xy}$	Штрих Шеффера (**И-НЕ**)
15	1 1 1 1	“1”	Константа **1**

Стрелка Пирса — двуместная логическая операция, введена в рассмотрение Ч. Пирсом (Ch. Peirce). Стрелка Пирса, обычно обозначаемая ↓, задаётся следующей таблицей истинности:

X	**Y**	**X↓Y**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Дает истину тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Таким образом, высказывание «A ↓ B» означает «ни A, ни B».

Через стрелку Пирса могут быть выражены все другие логические операции:

$$\neg x \equiv x \downarrow x$$

$$x \,\&\, y \equiv (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

$$x \vee y \equiv (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$

$$x \to y \equiv ((x{\downarrow}x) \downarrow y) \downarrow ((x{\downarrow}x) \downarrow y)$$

От перемены мест операндов результат операции не изменяется.

Может быть выражена через отрицание конъюнкции:

$$x{\downarrow}y \equiv (\neg x \wedge \neg y)$$

В логических схемах носит название "**операция ИЛИ-НЕ**"

Рассмотрение булевых функций одной, двух и большего числа переменных показывает, что всякая функция от меньшего числа переменных содержится среди функций большего числа переменных.

Функции, которые сводятся к зависимости от меньшего числа переменных, называют ***вырожденными***, а функции, существенно зависящие от всех переменных, являются ***невырожденными***.

Так, среди функций одной переменной имеются две вырожденные (**константы 0 и 1**, которые можно рассматривать как функции от нуля переменных), функции двух переменных содержат те же константы и **четыре функции одной переменной** и т. д.

Множество всех булевых функций вместе с операциями отрицания, дизъюнкции и конъюнкции образуют ***булеву алгебру***.

На основе определения основных операций нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств булевой алгебры:

Коммутативность

$$x + y = y + x$$

и

$$xy = yx$$

ассоциативность

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

дистрибутивность

$$x + yz = (x + y)(x + z) \qquad x(y + z) = xy + xz$$

Суперпозиции и формулы

Суперпозицией функций $f_1, \dots, f_m$ называется функция $\mathbf{f}$, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименования переменных, а формулой называется выражение, описывающее эту суперпозицию.

Понятие ***суперпозиции*** очень важно в алгебре логики, поэтому рассмотрим его более подробно.

Пусть дано множество (конечное или бесконечное) исходных функций $\sum = \{ f_1, \dots, f_m \dots\}$.

Символы переменных $x_1, \dots, x_n, \dots$ будем считать ***формулами глубины 0***.

Формула $\mathbf{F}$ имеет глубину $\mathbf{k+1}$, если $\mathbf{F}$ имеет вид

$$f_i\,(F_1, \dots , F_{n_i}),$$

где $f_i \in \sum$, n_i – число аргументов f_i, а $F_1, \dots , F_{n_i}$ – формулы, максимальная из глубин которых равна $\mathbf{k}$.

$F_1, \dots , F_{n_i}$ называют подформулами $\mathbf{F}$;

f_i называется внешней или главной операцией формулы $\mathbf{F}$.

Например, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ – это формулы глубины **1**, а

$f_3(f_1(x_3, x_1), f_2(x_1, f_3(x_1, x_2)))$ - формула глубины 3, содержащая одну подформулу **глубины 2** и две **подформулы глубины 1**.

Лекция 4

Разложение функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Введем обозначение $\mathbf{x^0} = \bar{x}$, $\mathbf{x^1 = x}$. Пусть α - параметр, равный **0** или **1**. Тогда $\mathbf{x^\alpha = 1}$, если $\mathbf{x = \alpha}$ и $\mathbf{x^\alpha = 0}$, если $\mathbf{x \neq \alpha}$.

Т. 1. **Всякая логическая функция $f(x_1, ..., x_n)$ может быть представлена в следующем виде:**

$$\mathbf{f(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)} = \bigvee_{\alpha_1,\ldots\alpha_m} x_1^{\alpha_1}\ldots x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m, \mathbf{x_{m+1}, ..., x_n}),$$

где $\mathbf{m \leq n}$, а дизъюнкция берется по всем $\mathbf{2^m}$ наборам значений переменных $\mathbf{x_1, ..., x_m}$.

Это равенство называется разложением по переменным $\mathbf{x_1, ..., x_m}$. Например, при $\mathbf{n = 4, m = 2}$ разложение имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} f(0,0, x_3, x_4) \vee \overline{x_1} x_2 f(0,1, x_3, x_4)$$
$$\vee\, x_1 \overline{x_2} f(1,0, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 f(1,1, x_3, x_4).$$

Теорема доказывается подстановкой в обе части равенства произвольного набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \ldots, \sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_n)$ всех **n** переменных.

Так как $\mathbf{x^\alpha = 1}$, только когда $\mathbf{x = \alpha}$, то среди $\mathbf{2^m}$ конъюнкций $x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}$ правой части в 1 обратится только одна – та, в которой $\alpha_1 = \sigma_1$,…, $\alpha_m = \sigma_m$. Все остальные конъюнкции равны 0. Поэтому получим:

$$f(\sigma_1, \ldots,\sigma_n) = (\sigma_1^{\sigma_1}\cdots\sigma_m^{\sigma_m}\, f(\sigma_1,...\sigma_m,\sigma_{m+1},...\sigma_n) = f(\sigma_1,...\sigma_n),$$

т. е. тождество.

При **m = 1** получаем разложение функции по одной переменной:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \overline{x_1}\, f(0, x_2,..., x_n) \vee x_1 f(1, x_2,..., x_n).$$

Другой важный случай – разложение по всем **n** переменным **(m=n).**

При этом все переменные в правой части получают фиксированные значения и функции в конъюнкциях правой части становятся равными 0 или 1, что дает

$$\mathbf{f(x_1, ..., x_n) =} \bigvee_{f(\alpha_1,...\alpha_m)=1} x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}, \qquad \mathbf{(2)}$$

где дизъюнкция берется по всем наборам (σ_1, …,σ_n), на которых f = 1.

Такое разложение называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (**СДНФ**) функции f.

СДНФ функции **f** содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц в таблице **f**; каждому единичному набору (σ_1, …,σ_n) соответствует конъюнкция всех переменных, в которых $\boldsymbol{x_i}$ взято с отрицанием, если $\sigma_i = 0$, и без отрицания, если $\sigma_i = 1$.

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между таблицей функции **f** и ее **СДНФ** и, следовательно, **СДНФ** для всякой логической функции единственна (как говорят в математике, “единственна с точностью до порядка конъюнкций”).

Например, пусть функция задана таблицей. Ее **СДНФ** будет

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

F= $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3$.

Единственная функция, не имеющая **СДНФ**, - это константа 0.

Формулы, содержащие кроме переменных (и, разумеется, скобок) только знаки функций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, будем называть ***булевыми функциями***. Соотношение (2) приводит к важной теореме.

Т. 2. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т. е. суперпозицией дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Действительно, для всякой функции, кроме константы **0**, таким представлением может быть ее **СДНФ**. Константу **0** можно представить булевой формулой $\bar{x}x=0$.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Свойства операций И/ИЛИ/НЕ

$\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$; $x + 0 = x$; $x \cdot 1 = x$; $x + 1 = 1$; $x \cdot 0 = 0$.

2. $x + x = x$; $x \cdot x = x$ (закон идемпотентности).
3. $x + \bar{x} = 1$; $x \cdot \bar{x} = 0$.
4. $\bar{\bar{x}} = x$ (закон двойного отрицания).
5. $x + y = y + x$; $xy = yx$ (перестановочный закон).
6. $x + xy = x$; $x(x + y) = x$ (закон поглощения).
7. $x + \bar{x}y = x + y$; $x(\bar{x} + y) = xy$.
8. $(x + y)(x + \bar{y}) = x$; $xy + x\bar{y} = x$ (закон склеивания).
9. $\overline{x + y} = \bar{x}\,\bar{y}$; $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$ (теорема Де Моргана).
10. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$ (сочетательный закон).
11. $(xy)z = x(yz) = xyz$ (ассоциативный закон).
12. $x + yz = (x + y)(x + z)$; $x(y + z) = xy + xz$ (дистрибутивный закон).

Приведение к дизъюнктивной нормальной форме ДНФ (в том числе к СДНФ)

Элементарными конъюнкциями называются конъюнкции переменных или их отрицаний, в которых каждая переменная встречается не более одного раза.

Дизъюнктивной нормальной формой **(ДНФ)** называется формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций. ДНФ функции может быть не единственной.

Приведение к ДНФ делается следующим образом.

Сначала с помощью правил снятия двойного отрицания и правил де Моргана все отрицания устанавливаются у переменных.

Затем раскрываются скобки, с помощью правил идемпотентности, закона противоречия и исключенного третьего удаляются лишние конъюнкции и повторения переменных, а с помощью свойств констант удаляются константы.

Пример**.**

$$xy \vee \bar{x}(y \vee xz)(\overline{x(\bar{y} \vee z) \vee yz}) = xy \vee (\bar{x}y \vee \bar{x}xz)(\bar{x} \vee \overline{(\bar{y} \vee z)})yz = xy \vee y\bar{z}$$

Всякую ДНФ можно привести к СДНФ расщеплением конъюнкций, которые содержат не все переменные, например:

$$xy \vee \bar{x}y\bar{z} = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Приведение к конъюнктивной нормальной форме.

Аналогично ДНФ определяется конъюнктивная нормальная форма (КНФ) как конъюнкция элементарных дизъюнкций.

От ДНФ к КНФ перейдем следующим образом.

Пусть ДНФ функции F имеет вид $\mathbf{F = k_1 \vee \ldots \vee k_m}$, где $\mathbf{k_1 \ldots k_m}$ - элементарные конъюнкции.

Формулу $\overline{\mathrm{k}_1 \vee \ldots \vee k_m}$ приведем к ДНФ $\mathrm{k}_1^{'} \vee \ldots \vee k_m^{'}$.

Тогда $\mathrm{F} = \overline{\overline{k_1 \vee \ldots k_m}} = \overline{k_1^{'} \vee \ldots \vee k_m^{'}} = \overline{k}_1^{'} \overline{k}_2^{'} \ldots \overline{k}_m^{'}$.

По правилу де Моргана отрицания элементарных конъюнкций преобразуются в элементарные дизъюнкции, что и даст КНФ.

Пример.

$$x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z} = \overline{\overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{z}}} = \overline{(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee xyz} = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Аналогом **СДНФ** является **СКНФ** – совершенная конъюнктивная нормальная форма, каждая элементарная дизъюнкция которой содержит все переменные. Единственная функция, не имеющая **СКНФ** – это константа **1**.

Геометрическое представление

Область определения булевых функций от **n** переменных

$\mathbf{Y = f(x_1,\ldots,\ x_n)}$ можно рассматривать как **n**- мерные векторы (слова длины **n**), компонентами которых являются буквы **0** и 1 двоичного алфавита.

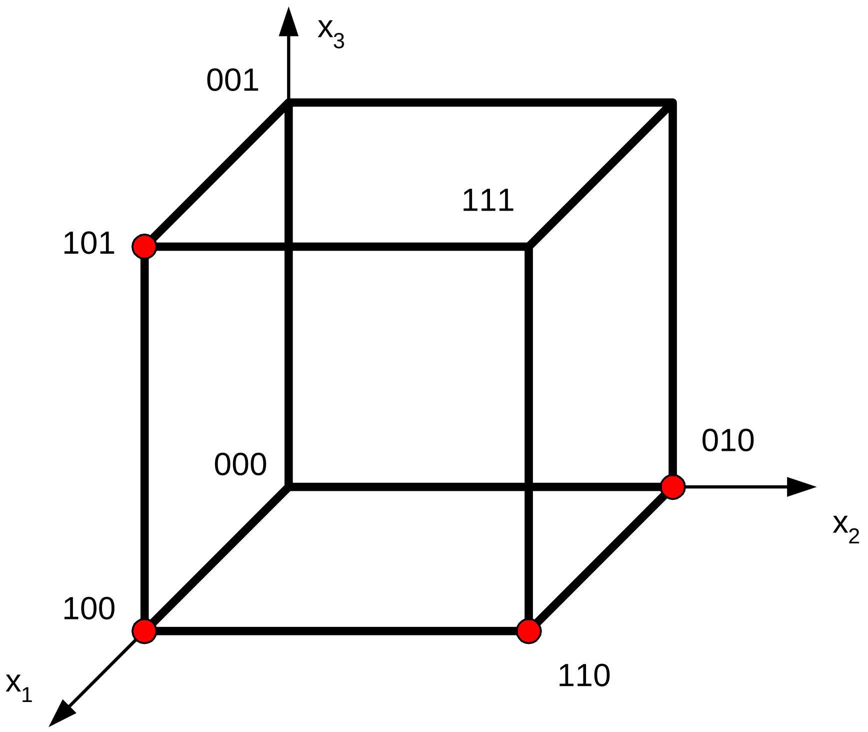
При **n=3** каждый вектор представляется вершиной единичного куба в трехмерном пространстве.

В общем случае совокупность векторов $\mathbf{(x_1,\ldots,\ x_n)}$ отображается на множестве вершин **n**-мерного куба. Все такие вершины образуют ***логическое пространство***.

Булева функция отображается на **n**-мерном кубе путем выделения вершин, соответствующим векторам $\mathbf{(x_1,\ldots,\ x_n)}$, на которых булева функция $\mathbf{Y = f(x_1,\ldots,\ x_n)}$ принимает значения 1. Обычно такие вершины отмечают жирными точками.

Так, отображение булевой функции

$\mathbf{Y = (x_1 \vee x_2)(x_2 \rightarrow \bar{x}_3)}$ будет (привести к ДНФ):



Члены дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формы, представляющие собой элементарные конъюнкции (дизъюнкции) **k** букв, называют ***минитермами (макстермами)*** **k-ранга**. Так,

xy – минитерм второго ранга,

xyz – минитерм третьего ранга,

$\mathbf{x \vee y}$ – макстерм второго ранга.

Конституенты и представление функций

Для совокупности переменных $\mathbf{x_1, \ldots, x_n}$ выражение

$\tilde{\mathbf{x}}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2 \ldots \tilde{\mathbf{x}}_n$ называют ***конституентой единицы***, а выражение

$\tilde{\mathbf{x}}_1 \vee \tilde{\mathbf{x}}_2 \vee \ldots \vee \tilde{\mathbf{x}}_n$ -***конституентой нуля*** ($\tilde{\mathbf{x}}_i$ означает либо $\mathbf{x_i}$, либо $\bar{\mathbf{x}}_i$).

Данная конституента единицы (нуля) обращается в единицу (нуль) только при одном соответствующем ей наборе значений переменных, который получается, если все переменные принять равными единице (нулю), а их отрицания – нулю (единице).

Например, конституенте единицы $x_1\ \bar{x}_2\ x_3\ x_4$ соответствует набор **(1011)** **-11**$_{10}$, а конституенте нуля $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$ - набор **(1001)**.

Так как **совершенная дизъюнктивная (конъюнктивная) нормальная** форма является **дизъюнкцией (конъюнкцией) конституент единицы (нуля)**, то можно утверждать, что представляемая ею булева функция ***f(x***$_1$***, ..., x***$_n$***)*** обращается в единицу (нуль) только при наборах значений переменных x_1, ..., x_n, соответствующих этим конституентам. На остальных наборах эта функция обращается в нуль (единицу).

Например, функции, заданной таблицей

X_1	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
X_2	0	0	**1**	**1**	0	0	**1**	**1**
X_3	0	**1**	0	1	0	1	0	**1**
Y	0	**1**	**1**	0	**1**	0	0	**1**

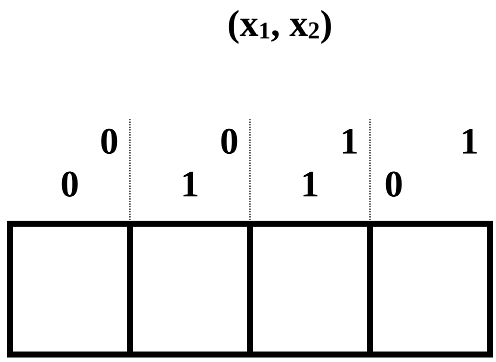
соответствуют совершенные нормальные формы:

$$y = \bar{x}_1\ \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1\ x_2\ \bar{x}_3 \vee x_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$

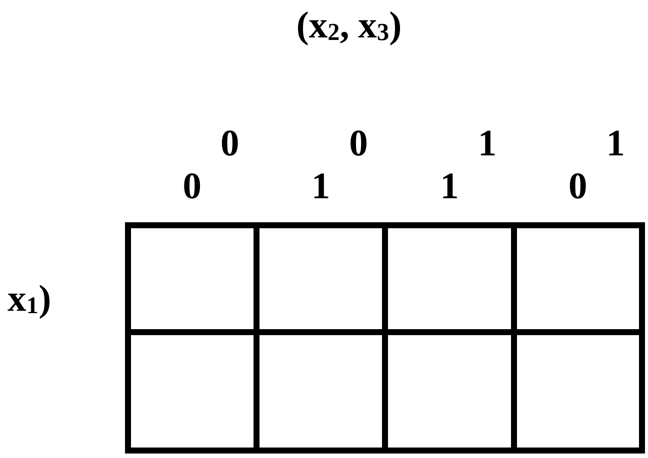
$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\ (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\ (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

Карты Карно

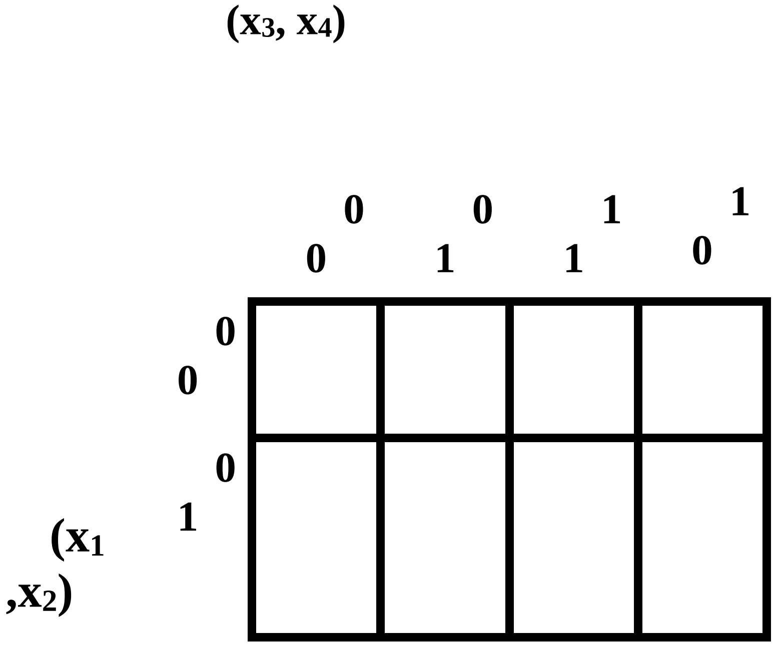
В другом методе графического отображения булевых функций используются ***карты Карно***, которые представляют собой специально организованные таблицы соответствия. Столбцы и строки таблицы соответствуют всевозможным наборам значений не более двух переменных, причем эти наборы расположены в таком порядке, что каждый последующий отличается от предыдущего значением только одной из переменных (код Грея). Благодаря этому и соседние клетки таблицы по горизонтали и вертикали отличаются только одной переменной. Клетки, расположенные по краям таблицы, также считаются соседними и обладают этим свойством. Карты Карно для 2, 3 и 4 переменных (рисунок 5).



а)



b)



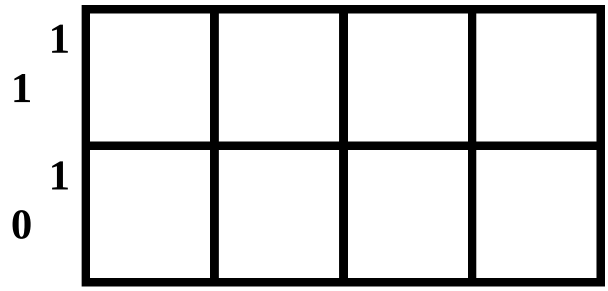
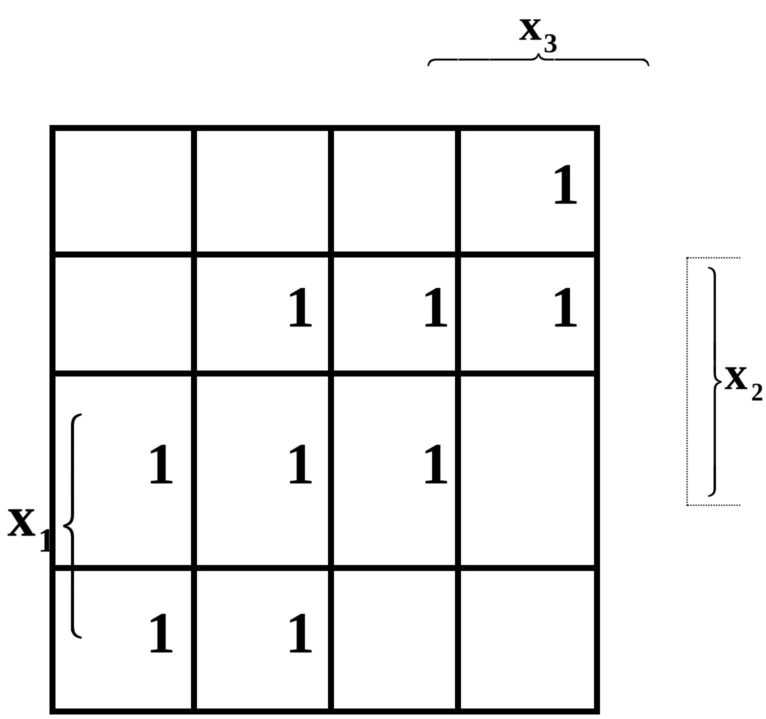


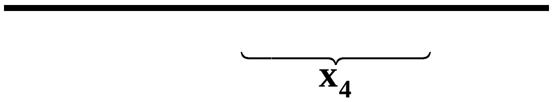
Рисунок 5 - Карты Карно для 2, 3 и четырех переменных

Как и в обычных таблицах истинности, клетки наборов, на которых функция принимает значение 1, заполняется единицами (нули обычно не вписывают, им соответствуют пустые клетки) (рисунок 6а). Для упрощения строки и столбцы, соответствующие значениям 1 для некоторой переменной, выделяются фигурной скобкой с обозначением этой переменной.

Использование карт Карно требует более простых построений по сравнению с отображением на n-мерном кубе. Для отображения функции 5 переменных используют 2 карты Карно на 4 переменные, а для 6 переменных – 4 такие карты. При дальнейшем увеличении числа переменных карты Карно становятся практически непригодными.

Известные в литературе карты Вейча отличаются только другим порядком следования наборов значений переменных и обладают теми же свойствами, что и карты Карно.





6а) Отображение на карте Карно функции 4 переменных

$$x_1x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee$$

$$\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$$

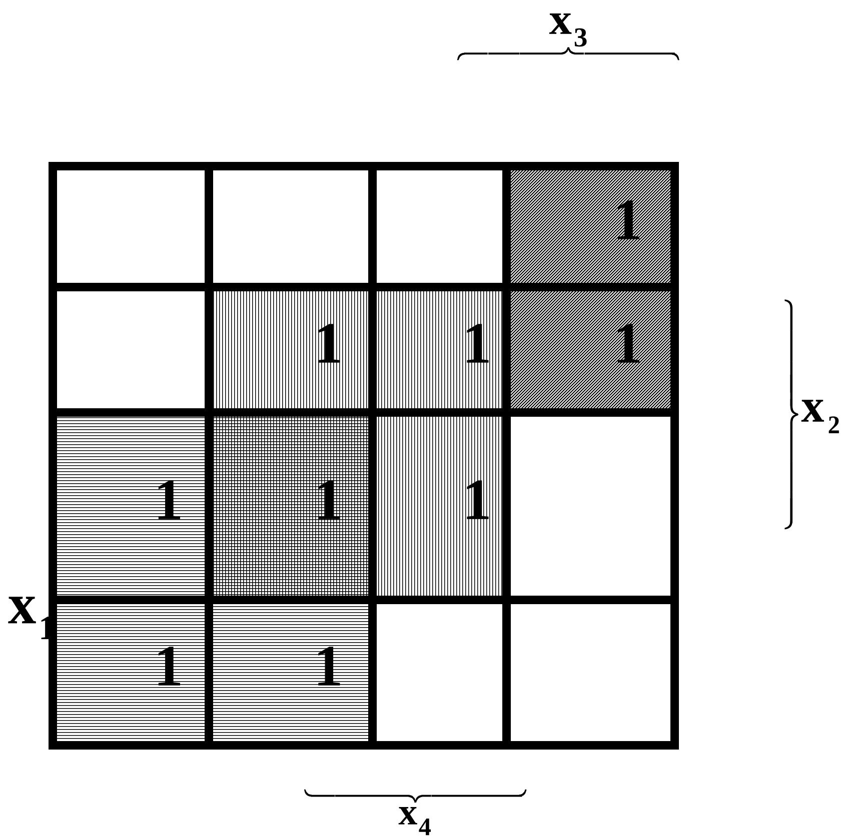
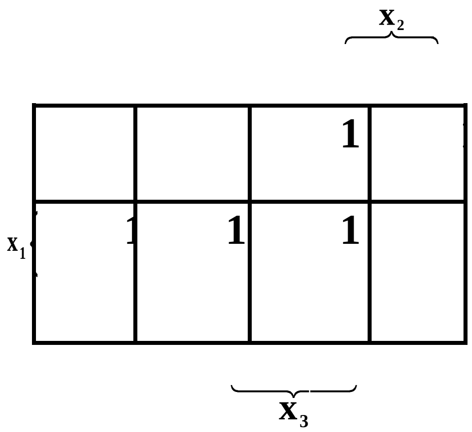


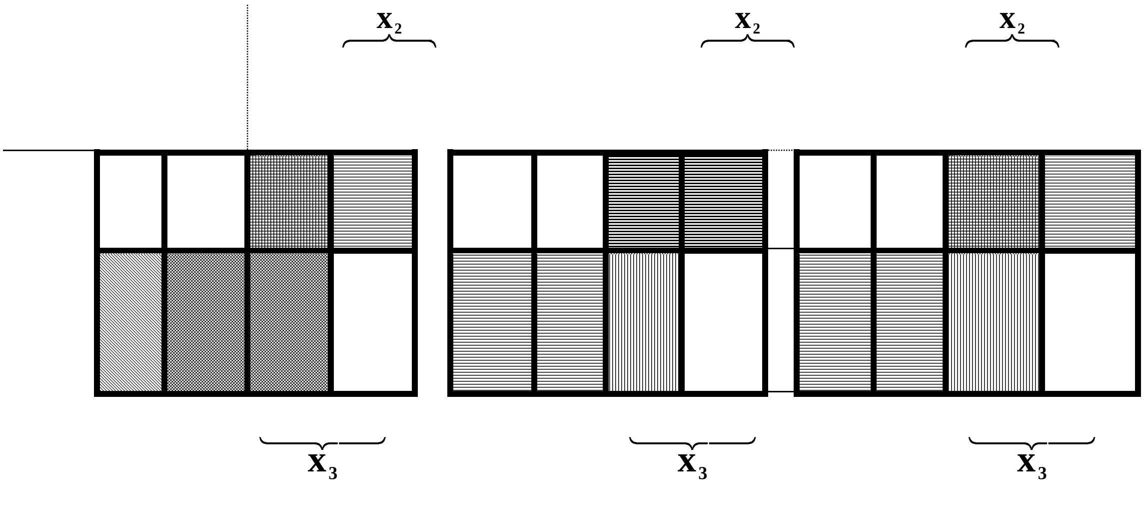
Рисунок 6b) – Минимальное покрытие $x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3\overline{x}_4$

Для упрощения строки и столбцы, соответствующие значениям 1 для некоторой переменной, выделяются фигурной скобкой с обозначением этой переменной.

Между отображениями функции на **n** –мерном кубе и на карте Карно имеет место взаимно-однозначное соответствие. На карте Карно **s**-кубу соответствует совокупность 2 соседних клеток, расположенных в строке, столбце, квадрате или прямоугольнике (с учетом соседства противоположных краев карты). (Рисунок 6b).

Считывание минитермов с карты Карно осуществляется по простому правилу. Клетки, образующие s-куб, дают минитерм **(n-s)**-го ранга, в который входят те **(n-s)** переменные, которые сохраняют одинаковые значения на этом s-кубе, причем значениям 1 соответствуют сами переменные, а значениям 0 – их отрицания. Различные способы считывания приводят к различным представлениям функции в дизъюнктивной нормальной форме (рисунок 7).





$$y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

$$y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \vee x_1 x_2 x_3$$

$$y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \vee x_2 x_3$$

Рисунок 7 – Способы считывания с карты Карно ДНФ булевой функции

Использование карт Карно требует более простых построений по сравнению с отображением на n-мерном кубе. Для отображения функции 5 переменных используют 2 карты Карно на 4 переменные, а для 6 переменных – 4 такие карты. При дальнейшем увеличении числа переменных карты Карно становятся практически непригодными.

Известные в литературе карты Вейча отличаются только другим порядком следования наборов значений переменных и обладают теми же свойствами, что и карты Карно.

Лекция 5
Логические схемы

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются ***логическими элементами***. Их входы соответствуют булевым переменным, а выход – реализуемой функции.

Подобно суперпозиции функций логические схемы образуются ***суперпозицией элементов*** посредством объединения их внешних узлов, при этом множество всех узлов схемы разбивается на ***входные, выходные и внутренние.***

Корректно построенные схемы должны удовлетворять следующим условиям:

1) не допускать замкнутых контуров, которые могут привести к неоднозначности сигналов на входах элементов;
2) любой вход элемента должен быть связан только с одним входом схемы или выходом другого элемента;
3) выходы элементов, не являющиеся выходами схемы и не связанные с входами других элементов, считаются лишними и исключаются из схемы.

Задача проектирования логических схем состоит в том, чтобы обеспечить наиболее экономичную реализацию булевой функции в некотором базисе, который обусловлен имеющимся в распоряжении инженера набором логических элементов или выбирается по соображениям наибольшей простоты реализации данного класса функций.

Реализация в различных базисах

Прежде всего, исходная функция преобразуется к такому виду, чтобы она представляла собой суперпозицию только тех функций, которые входят в данный базис. Например, в базисе, состоящем из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Как правило, на практике используются неминимальные базисы, так как минимальные базисы не всегда обеспечивают наиболее экономичную реализацию булевых функций.

Минимальные формы

Любая булева функция представима в совершенной нормальной форме (дизъюнктивной или конъюнктивной). Более того, такое представление является первым шагом перехода от табличного задания функции к ее аналитическому выражению.

Каноническая задача синтеза логических схем в булевом базисе сводится к минимизации булевых функций, т. е. к представлению их в дизъюнктивной нормальной форме, которая содержит наименьшее число букв (переменных и их отрицаний). Такие формы называют *минимальными.* При каноническом синтезе предполагается, что на входы схемы подаются как сигналы $\mathbf{x_i}$, так и их инверсии $\mathbf{\bar{x}_i}$.

Формула, представленная в дизъюнктивной нормальной форме, упрощается многократным применением ***операции склеивания и операции поглощения:***

$$\mathbf{ab \vee a\bar{b} = a}$$

$$\mathbf{a \vee ab = a}$$

$$\mathbf{a \vee \bar{a}b = a \vee b}$$

(дуальные тождества для конъюнктивной нормальной формы имеют вид:

$$\mathbf{(a \vee b)(a \vee \bar{b}) = a}$$

$$\mathbf{a(a \vee b) = a}$$

$$\mathbf{a(\bar{a} \vee b) = ab}$$

Здесь под **a** и **b** можно понимать любую формулу булевой алгебры. В результате приходим к такому аналитическому выражению, когда дальнейшие преобразования оказываются уже невозможными, т. е. получаем ***тупиковую*** *форму.*

Среди тупиковых форм находится ***минимальная дизъюнктивная форма***, причем она может быть неединственной. Чтобы убедиться в том, что данная тупиковая форма является минимальной, необходимо найти все тупиковые формы и сравнить их по числу входящих букв.

Многомерный куб

Каждой вершине n-мерного куба можно поставить в соответствие конституенту единицы. Следовательно, подмножество отмеченных вершин является отображением на **n**-мерном кубе булевой функции от n переменных в совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Для отображения функции от **n** переменных, представленной в любой дизъюнктивной нормальной форме, необходимо установить соответствие между ее минитермами и элементами n-мерного куба.

Минитерм (n-1)-го ранга можно рассматривать как результат склеивания двух минитермов n-го ранга (конституент единицы), т. е.

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1} x_i \vee \varphi_{n-1} \bar{x}_i$$

На n-мерном кубе это соответствует замене двух вершин, которые отличаются только значениями координаты x_i, соединяющими эти вершины ребром (говорят, что ребро ***покрывает*** инцидентные ему вершины). Таким образом, минитермам **(n-1)**-го ранга соответствуют ребра **n**-мерного куба. Аналогично устанавливается соответствие минитермов **(n-2)**-го порядка граням n-мерного куба, каждая из которых покрывает четыре вершины (и четыре ребра).

Элементы **n**-мерного куба, характеризующиеся **s** измерениями, называют
s-кубами.

Так, **вершины** являются **0-кубами,** ребра –**1-кубами**, **грани** – **2-кубами**. Обобщая приведенные рассуждения, можно считать, что минитерм (n-s)-го ранга в дизъюнктивной нормальной форме для функции n переменных отображается s-кубом, причем каждый s-куб покрывает все те s-кубы низшей размерности, которые связаны только с его вершинами.

Стремление к минимальной форме интуитивно понимается как поиск такого покрытия, число s-кубов которого было бы поменьше, а их размерность **s** – больше. Покрытие, соответствующее минимальной форме, называют ***минимальным покрытием***.

Отображение функции на **n** – мерном кубе наглядно и просто при **n≤3**. Четырехмерный куб можно изобразить (рисунок 4):

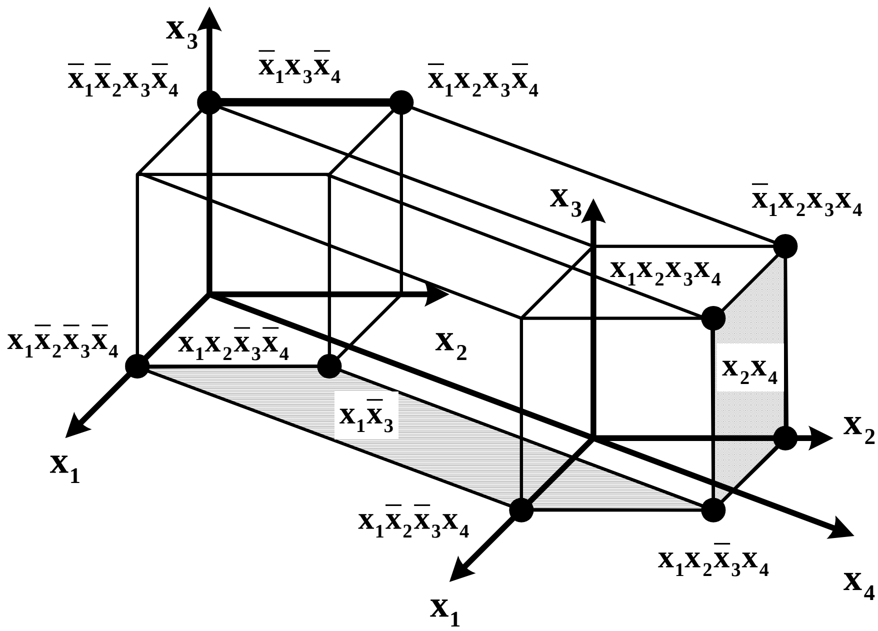


Рисунок 4 – Отображение функции $\mathbf{x_1\overline{x_3} \vee x_2x_4 \vee \overline{x_1}x_3\overline{x_4}}$ на четырехмерном кубе

Здесь отображена функция четырех переменных и ее минимальное покрытие. Использование этого метода при n>4 требует настолько сложных построений, что теряются все его преимущества.

Минимизация булевых функций

Минимизация схемы в булевом базисе сводится к поиску минимальной дизъюнктивной формы, которой соответствует минимальное покрытие. Общее число букв, входящих в нормальную форму, выражается ***ценой покрытия***

$$\mathbf{c = \sum_{s} q_s (n - s),}$$

где q_s - число s-кубов, образующих покрытие данной функции от n переменных.

Обычно задача минимизации решается в два шага. Сначала ищут сокращенное покрытие, которое включает все s-кубы максимальной размерности, но не содержат ни одного куба, покрывающегося каким-либо кубом этого покрытия. Соответствующую ДНФ называют ***сокращенной****,* а ее минитермы – ***простыми импликантами***. Для данной функции сокращенное покрытие является единственным, но оно может быть избыточным вследствие того, что некоторые из кубов покрываются совокупностями других кубов.

На втором шаге осуществляется переход от сокращенной к тупиковым ДНФ, из которых выбираются минимальные формы. Тупиковые формы образуются путем исключения из сокращенного покрытия всех избыточных кубов, без которых оставшаяся совокупность кубов еще образует покрытие данной функции, но при дальнейшем исключении любого из кубов она уже не покрывает множества всех вершин, т. е. перестает быть покрытием.

Куб сокращенного покрытия, который покрывает вершины данной функции, не покрываемые никакими другими кубами, не может оказаться избыточным и всегда войдет в минимальное покрытие.

Такой куб, как и соответствующая ему импликанта, называют ***экстремалью (существенной импликантной)***, а покрываемые им вершины - ***отмеченными вершинами***.

Множество экстремалей образуют ***ядро покрытия.*** Ясно, что при переходе от сокращенного покрытия к минимальному прежде всего следует выделить все экстремали. Если множество экстремалей не образует покрытия, то оно дополняется до покрытия кубами из сокращенного покрытия.

На рисунке 8а приведено **сокращенное покрытие** Z и **минимальные покрытия** $\mathbf{C}'_{\min}$ (рисунок 8б) и $\mathbf{C}''_{\min}$ (рисунок 8в):

Сокращенное покрытие Z и минимальные покрытия $\mathbf{C}'_{\min}$ и $\mathbf{C}''_{\min}$ выражаются следующим образом:

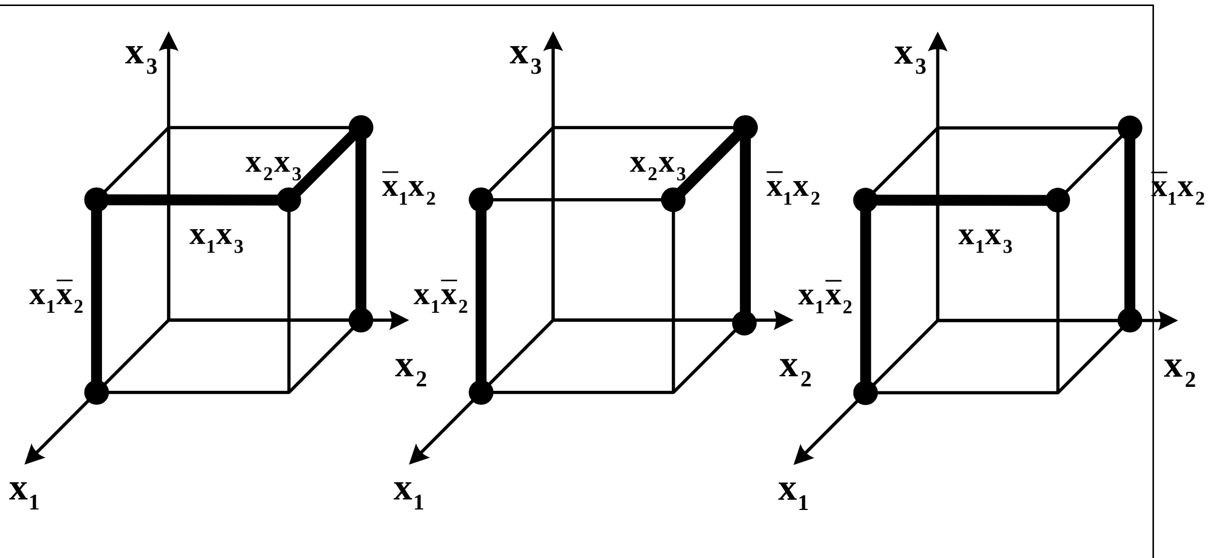


Рисунок 8 – Покрытие функции

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}_1\mathbf{x}_2\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \bar{\mathbf{x}}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_2\bar{\mathbf{x}}_3 \vee \mathbf{x}_1\bar{\mathbf{x}}_2\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$$

а – неминимальное; б, в – минимальные.

$$\mathbf{Z}=\begin{Bmatrix}1&1&x&0\\0&x&1&1\\x&1&1&x\end{Bmatrix};\ \mathbf{C}'_{min}=\begin{Bmatrix}1&x&0\\0&1&1\\x&1&x\end{Bmatrix};\ \mathbf{C}''_{min}=\begin{Bmatrix}1&1&0\\0&x&1\\x&1&x\end{Bmatrix}.$$

Сокращенная форма представляет собой дизъюнкцию 4 простых импликант, т.е. $\mathbf{y = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2}$. Экстремалями являются простые импликанты $\mathbf{x_1\bar{x}_2}$ и $\mathbf{\bar{x}_1x_2}$, которым соответствуют 1-кубы (10x) и (01x), а отмеченные вершины - $\mathbf{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}$ и $\mathbf{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3}$ или соответственно (100) и (010).

Метод Квайна – Мак-Класки

Этот метод используется в случаях, когда функция задана в дизъюнктивной совершенной нормальной форме (или таблицей истинности). Приведение к сокращенной форме осуществляется последовательным применением операции склеивания, $\mathbf{ax_i \vee a\bar{x}_i = a}$, где $\mathbf{a}$ - конъюнкции переменных, отличных от $\mathbf{x_i}$. Множеству конституент единицы, представленных в исходной форме, соответствует совокупность **0**-кубов $\mathbf{K^0}$, а операция склеивания - объединением двух **0**-кубов, которые отличаются только одной координатой.

Результатом такого объединения является **1**-куб, в котором различные координаты исходных **0**-кубов замещены символом **x**. Сравнивая попарно все **0**-кубы, получаем множество **1**-кубов $\mathbf{K^1}$.

Применяя к $\mathbf{K^1}$ операцию склеивания, находим множество **2**-кубов $\mathbf{K^2}$ и т. д.

Этот продолжается до тех пор, пока получаемое из $\mathbf{K^s}$ очередное $\mathbf{K^{s+1}}$ не окажется пустым множеством. В результате множество $\mathbf{K^0}$ преобразуется в комплекс кубов $\mathbf{K = \{K^0, K^1, K^2, ..., K^s\}}$, причем $\mathbf{s \le n}$.

Для выделения из $\mathbf{K}$ множества простых импликант $\mathbf{Z \subset K}$ при каждой операции склеивания необходимо отмечать каким-либо знаком (например,
меткой $\vee$) те кубы, которые объединяются в кубы высшей размерности. Очевидно, неотмеченные кубы и образуют множество простых импликант $\mathbf{Z}$.

Чтобы уменьшить число сравниваемых пар при операции объединения целесообразно разбить множество $\mathbf{K^s}$ на классы, в каждом из которых содержатся $\mathbf{s}$-кубы с одинаковым числом единиц (или нулей), и упорядочить эти классы по возрастающему числу единиц.

Так как объединяться могут только такие два $\mathbf{s}$-куба, число единиц в которых точно на одну больше или меньше, то достаточно ограничиваться попарным сравнением $\mathbf{s}$-кубов одного класса с $\mathbf{s}$-кубами соседнего класса.

На втором шаге при извлечении **экстремалей** и образовании **минимального покрытия** используется таблица покрытий. Ее строки соответствуют простым импликантам, а столбцы – констституентам единицы СДНФ данной функции, которые представлены 0-кубами (вершинами) комплекса кубов.

В клетку таблицы записывается метка, если ее простая импликанта в данной строке покрывает вершину в данном столбце. Экстремалям соответствуют те строки таблицы, которые содержат единственную метку в каком-нибудь столбце. Удаляя строки экстремалей и все столбцы, в которых эти строки имеют метки, получаем более простую таблицу.

На основе этой таблицы выбираем простые импликанты, которые дополняют выделенное множество экстремалей до минимального покрытия функции.

Пример минимизации функции

Рассмотрим в качестве примера функцию четырех переменных

$\mathbf{y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)}$, заданную таблицей истинности

x_1	00	000	111	111
	00	0	1	1
x_2	00	111	000	111
	00	1	0	1
x_3	00	001	001	001
	11	1	1	1
x_4	01	010	010	010
	01	1	1	1
Y	00	110	010	110
	01	1	1	0

Ей соответствует **СДНФ**

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee$$

$$\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee$$

$$\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 .$$

Множество 0-кубов после разбиения и упорядочения записываются следующим образом:

$$K^0 = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \vee & | & \vee & \vee & \vee & \vee & | & \vee & \vee & \vee \\ 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & | & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & | & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}.$$

Объединяя кубы и отмечая те из них, которые покрываются кубами большей размерности, имеем:

$$K^1 = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \vee & \vee & & & & & & \vee & & \vee \\ 0 & x & | & 0 & 0 & x & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & | & x & 1 & 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 & x & 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & | & 1 & 1 & 1 & |1 & 1 & 1 & x \end{array} \right\}; K^2 = \left\{ \begin{array}{c} x \\ 1 \\ 0 \\ x \end{array} \right\}.$$

Простым импликантам соответствуют неотмеченные кубы. Составляем таблицу покрытия Z, которому соответствует сокращенная форма

$$y = \overline{x}_1 x_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 x_4 \vee \overline{x}_2 x_3 x_4 \vee$$

$$\vee x_1 \overline{x}_2 x_4 \vee x_1 \overline{x}_3 x_4 \vee x_2 x_3 .$$

K^0 Z									Обозначения импликант
0 x 1 1									**A**
0 1 x 1									**B**
X 0 1 1									**C**
1 0 x 1									**D**
1x 0 1									**E**
x 1 0 x									**F**

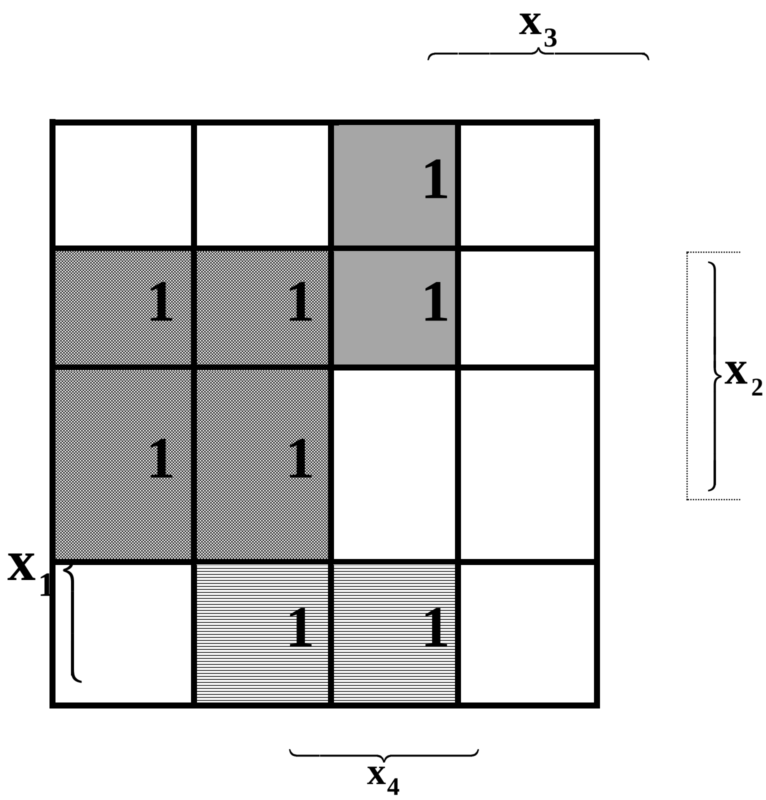
Извлекаем единственную экстремаль **(x10x)**, которой соответствует минимум $x_2 \bar{x}_3$, и упрощаем таблицу к виду:

K^0_1 Z	0011	1001	0111	1011
0x11	∨		∨	
01x1			∨	
x011	∨			∨
10x1		∨		∨
1x01		∨		

В качестве дополнительных целесообразно выбрать кубы** (0x11) **и** (10x1), **так как они совместно с экстремалью** (x10x) **образуют покрытие функции, минимальная форма которой имеет вид:

$$y = \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 .$$

Соответствующее этой функции минимальное покрытие иллюстрируется на Карте Карно.


x3
1
1 1 1
1 1
1 1
x2
x1
x4

Лекция 6

Алгебра логики

Алгебра логики (алгебра высказываний) - раздел математической логики, в котором изучаются логические операции над высказываниями. Чаще всего предполагается (т. н. бинарная или двоичная логика, в отличие от, например, троичной логики), что высказывания могут быть только истинными или ложными.

Определение 2.1. ***Высказыванием*** называется повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Примеры высказываний:

1) Лондон – столица Франции.
2) Окунь - это рыба.
3) Число 14 делится на 2 и на 7.
4) Если студент учится на отлично, то он получит красный диплом.
5) Я лгу.

Высказываниями являются 1, 2, 3 и 4 предложения. Предложение 5 является логическим парадоксом.

Алгебра логики возникла в середине 19 в. в трудах Дж. Буля и развивалась затем в работах Ч. Пирса, П. С. Порецкого, Б. Рассела,
Д. Гильберта и др. Создание алгебры логики представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраиче-

скими методами.

Базовыми элементами, которыми оперирует алгебра логики, являются высказывания. Высказывания строятся над множеством **{B, ¬, ∧, ∨, 0, 1}**, где **B** — непустое множество, над элементами которого определены три операции:

¬ *отрицание* (унарная операция),

∧ *конъюнкция* (бинарная),

∨ *дизъюнкция* (бинарная),

а также константы - логический ноль **0** и логическая единица **1.**

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое истинно, если высказывание ложное и наоборот. Таблица истинности операции отрицания имеет вид:

x	$\neg x$
0	1
1	0

Дизъюнкцией двух высказываний x и y (логическое «или») называется новое высказывание, которое будет истинным тогда когда, когда хотя бы одно из высказываний будет истинным.

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкцией двух высказываний x и y (логическое «и») называется новое высказывание, которое будет истинным тогда когда, когда оба высказывания истины. Обозначение операции конъюнкция - **&**($\wedge$ **,** $\cdot$).

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликацией двух высказываний x и y («если – то») называется новое высказывание, которое ложно тогда, когда ***x (предпосылка)***– истинно, а ***y (следствие)***– ложно.

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентностью двух высказываний x и y («тогда и только тогда») называется новое высказывание, которое будет истинно, если высказывания ***x*** и ***y*** будут одновременно истинны или ложны.

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Для операций справедливы следующие приоритеты: $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Лекция 7

Элементы теории графов

Основные понятия и термины

Природа говорит языком математики:

Буквы этого языка – круги, треугольника и иные математические фигуры.

Г. Галилей

Графы (***от греческого*** *γραφω* ***- пишу***) представляют собой наиболее абстрактную структуру, с которой приходится сталкиваться в теории ЭВМ (computer science).

В последнее время **теория графов** стала простым, доступным и мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем. Это проблемы:

- ***описания алгоритмов автоматического проектирования***
- ***проектирования интегральных схем и схем управления;***
- ***исследования автоматов, логических цепей, схем программ;***
- ***экономики и статистики;***
- ***при решении задач маршрутизации потоков;***
- ***теории расписаний и дискретной оптимизации***.

С понятием графа обычно связывают его графическое представление, при котором он изображается как множество точек, некоторые из которых соединены линиями.

Однако граф отличается от геометрических конфигураций (скажем, фигур, которые также состоят из точек-вершин и линий-сторон) тем, что в графе несущественны расстояния между точками, форма соединяющих линий и углы между ними. Важно лишь, соединена ли данная пара точек линий или нет.

Поэтому граф иногда называют ***топологическим*** *объектом, т. е. объектом, свойства которого не изменяются при растягивании, сжатии, искривлении (но без разрывов и склеиваний).*

По этой же причине (важно лишь наличие или отсутствие соединения) ***граф*** – объект дискретный и может быть задан двумя ***дискретными множествами:*** множеством точек, которые будем называть ***вершинами***, и множеством линий, соединяющих некоторые вершины.

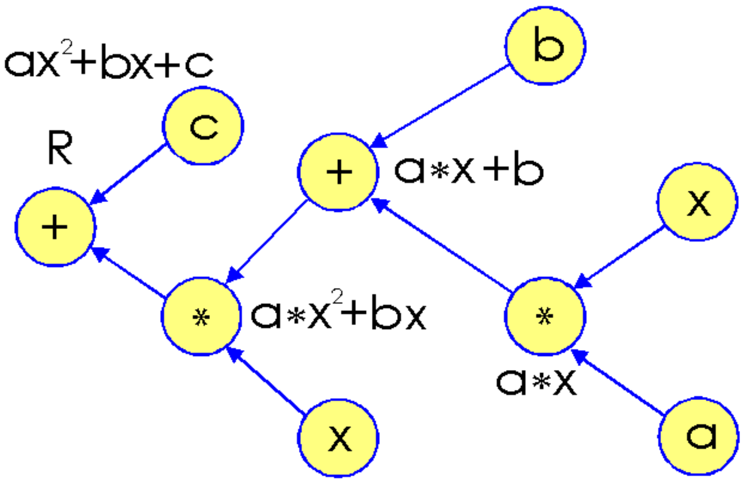


Рисунок 1 - Граф вычисления квадратного полинома по схеме Горнера

Существуют два основных вида графов (и множество их подвидов): ***ориентированные***, в которых линии имеют направление от одной точки к другой, и ***неориентированные***, в которых линии не имеют направления.

Любая система, предполагающая наличие **дискретных состояний** или **наличие узлов** и **переходов между ними** может быть описана графом.

Соединения между узлами графа называются **ребрами**. Если узлы графа не нумерованы, то ребра являются **неориентированными**. У графа с **нумерованными** узлами ребра **ориентированы**. Ребрам могут быть присвоены определенные **веса или метки**. На рисунке 2 приведены примеры обычного и ориентированного графа.

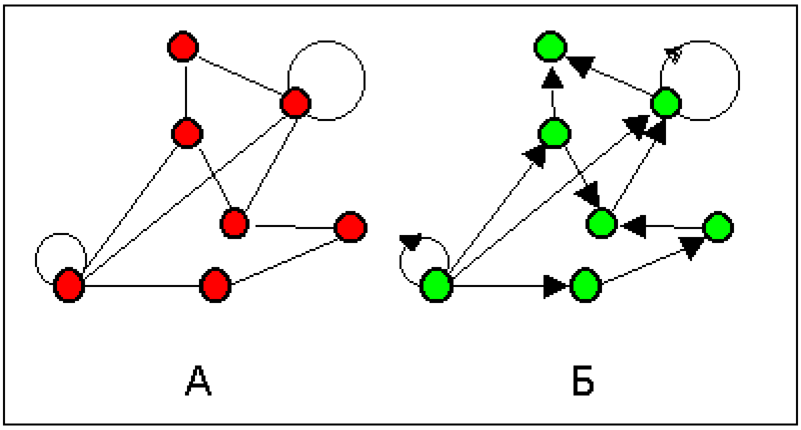
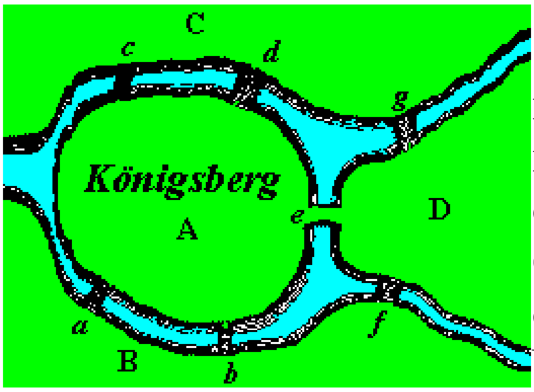


Рисунок 2 - Примеры неориентированного и ориентированного
графов (А и Б)

Определение 1. Граф представляет собой структуру **G = <V,E>,** в которой множество **V** представляет собой конечный набор ***вершин***, а множество **E**

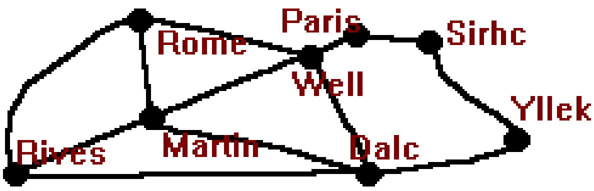
представляет собой конечный набор ребер.

Рассмотрим следующие три задачи:



1.Старый Кёнигсберг имел семь мостов. Горожане задавались вопросом, можно ли прогуляться вокруг города таким способом, чтобы пересечь каждый из семи мостов точно однажды. Что Вы думаете?

2. Сколькими цветами мы должны раскрасить карту так, чтобы каждая пара стран с общей границей имела различные цвета?
3. Имея карту с несколькими городами и дорогами между ними, можно ли коммивояжеру пройти через каждый из городов только один раз?

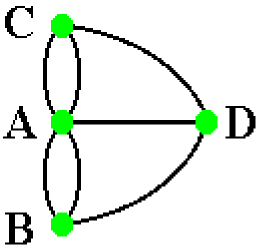


Что общего в этих трех проблемах?

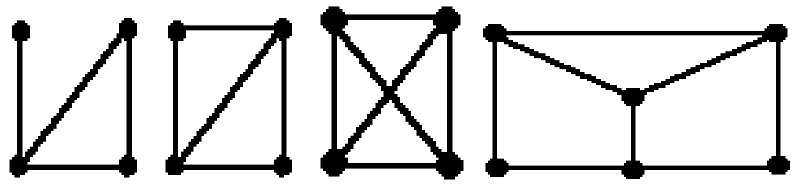
Да, в каждой из них имеем дело с картой, но что еще более важны все - вопросы о возможности соединения.

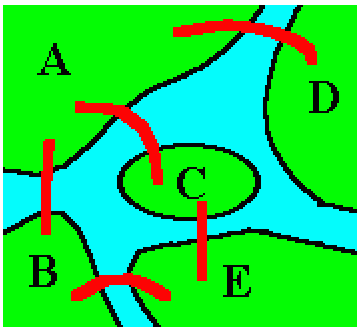
Как острова связаны мостами, какие страны граничат, какие города связаны дорогами?

Длина и точная форма мостов, границ и дорог ***не имеют*** значение.

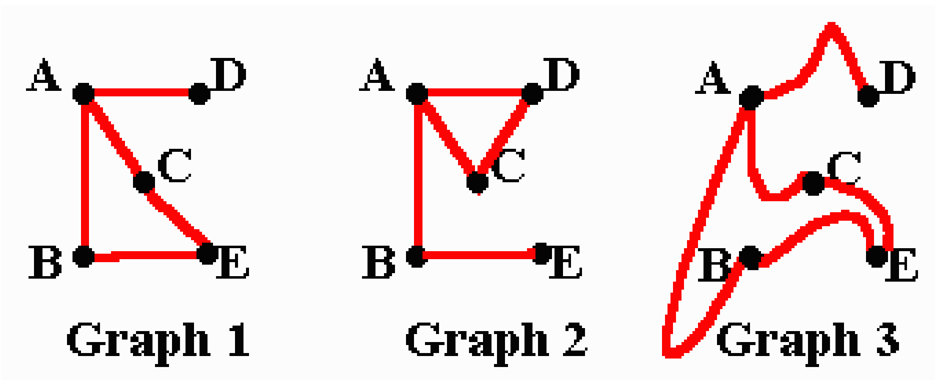


Вот - еще несколько примеров графов:





Карта островов (*зеленый*), связанных (*красными*) мостами. Какой из следующего графов соответствует карте?



Для ориентированного графа **E** - конечный набор ориентированных ребер. Ребром может быть прямая или кривая линия. Ребра не могут иметь общих точек кроме вершин (узлов) графа. Замкнутая кривая в E может иметь только одну точку из множества **V**, а каждая незамкнутая кривая в **E** имеет ровно две точки множества **V**.

Основные понятия и термины

Конечный граф – граф, множество вершин которого конечно.

Вершина графа – узловая точка графа.

Ребро графа – линия, связывающая пару вершин графа

Дуга – ориентированное ребро (имеющее направление, указываемое стрелкой).

Ориентированный граф – граф с ориентированными ребрами (дугами).

Параллельные дуги – соединяющие одну и ту же пару вершин графа.

Строго параллельные дуги – имеющие одинаковое направление.

Нестрого параллельные дуги – имеющие противоположные друг другу направления.

Смешанный граф – содержит ребра и дуги.

Взвешенный граф – граф, каждому ребру (дуге) которого приписан некоторый вес (число).

Петля – ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина.

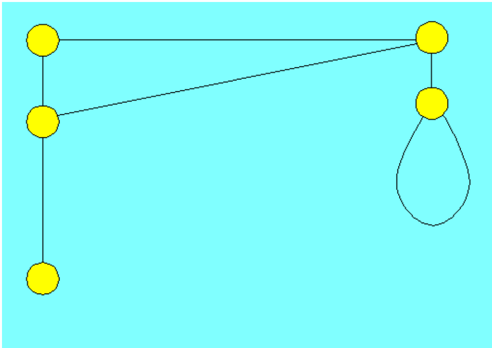
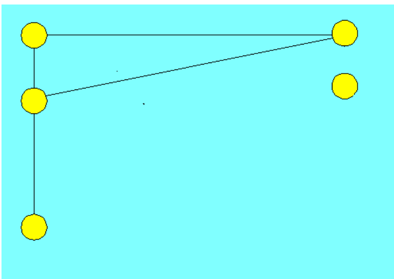


Рисунок 3 - Петля

Кратные ребра – параллельные ребра с одинаковыми граничными вершинами. Граф с кратными ребрами называют также ***мультиграфом***. На рис. 4 изображены два графа, левый является ориентированным мультиграфом, а правый - ориентированным графом без кратных ребер.

Рисунок 4 – Ориентированный мультиграф, ориентированный граф без кратных ребер

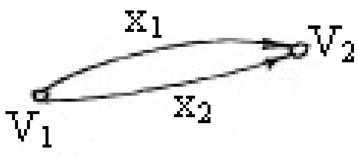
Изолированная вершина – не связанная с другими вершинами.



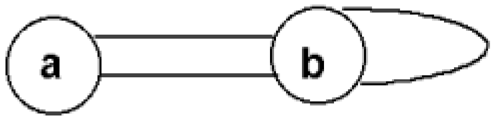
Степень вершины – число ребер, связанных с вершиной (петля учитывается дважды).

***Простой (обыкновенный)* граф** – граф без петель и кратных ребер. Ориентированный граф считается простым, если он не имеет строго параллельных дуг и петель.

Мультиграф – граф без петель, но с кратными ребрами.



Псевдограф – граф с петлями и кратными ребрами.



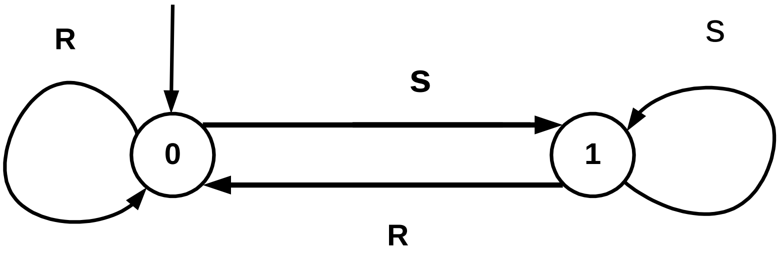
Пустой (***нуль-граф***) – граф, не имеющий ребер, все вершины которого изолированы.

Однородный (***регулярный***) граф – граф, степени всех вершин которого равны.

Смежные вершины – граничные вершины одного и того же ребра.

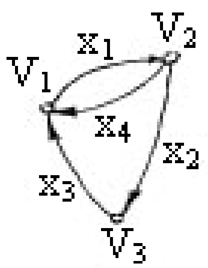
Сигнальный граф (***граф потоков сигналов***) (**en.**: Signaling graph) – ***граф***, вершины которого отождествляются с переменными, характеризующими состояние системы, а вес каждой вершины означает функцию времени (***сигнал вершины***). Дуги отображают связи между переменными, и вес каждой дуги представляет собой численное или функциональное отношение, характеризующее передачу сигнала от одной вершины к другой.

Пример. Триггер является простейшим автоматом. Рассмотрим RS-триггер. Состояние этого автомата является их выходом, то есть это автоматы Мура. В RS-триггере два входа: *Reset и Set.* Вход *Reset* сбрасывает, а *Set* устанавливает единичное состояние автомата.



Матрица смежности – строки и столбцы этой матрицы соответствуют вершинам графа, а ее **(*ij*)-й** элемент равен числу ребер, связывающих ***i***-ю вершину с ***j***-й (или направленных от *i*-й вершине к *j*-й для ориентированного графа).

Пример: для орграфа D, изображенного на рисунке, приведем матрицу смежности:



	V_1	V_2	V_3
V_1	0	1	0
V_2	1	0	1
V_3	1	0	0

Инцидентность – если некоторая вершина является концом ребра, говорят, что они инцидентны.

Матрица инцидентности – матрица, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Для неориентированного графа элементы этой матрицы определяются по

	x_1	x_2	x_3	x_4
v_1	-1	0	1	1
v_2	1	-1	0	-1
v_3	0	1	-1	0

следующему правилу: ***ij***-й элемент равен 1, если ***i***-я вершина инцидентна ***j***-му ребру. В случае орграфа ***ij***-й элемент равен 1, если ***i***-я вершина является началом ***j***-го ребра и -1, если является его концом.

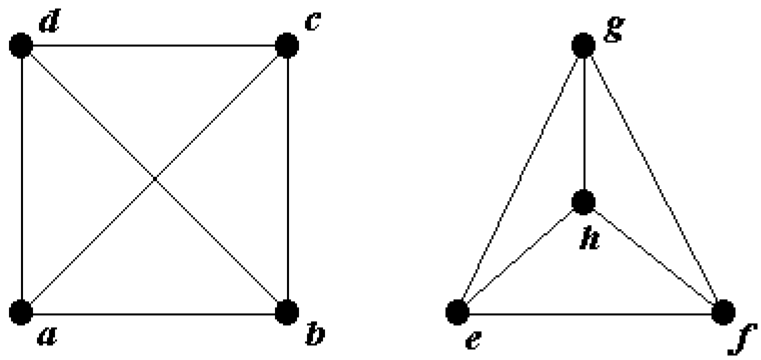
<u>Пример:</u> для орграфа, приведенного в примере для матрицы смежности, составим матрицу инцидентности:

Изоморфные графы – геометрически по-разному изображенные графы, имеющие одинаковую матрицу инцидентности.

Граф ***G*** изоморфен графу ***G1*** тогда и только тогда, когда существует отображение изоморфизма ***G*** на ***G1***, и обозначается ***G ~G1***.

Понятие изоморфизма для графов имеет наглядное толкование. Представим рёбра графов эластичными нитями, связывающими узлы – вершины. Тогда, изоморфизм можно представить как перемещение узлов и растяжение нитей.

Пример 1 (изоморфизм). Покажем, что следующие два графа изоморфны.



Действительно, отображение $a \to e, b \to f, c \to g, d \to h$, являющееся изоморфизмом легко представить как модификацию первого графа, передвигающую вершину d в центр рисунка.

Демонстрация изоморфизма (a4.gif)

Маршрут – последовательность ребер графа, таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают.

Замкнутый маршрут – приводит в ту же вершину, из которой начался.

Цепь – маршрут, все ребра которого различны.

Простая цепь – маршрут, для которого различны все вершины.

Цикл **–** замкнутая цепь.

Простой цикл – простая замкнутая цепь.

Эйлеров цикл – цикл, который содержит все ребра графа.

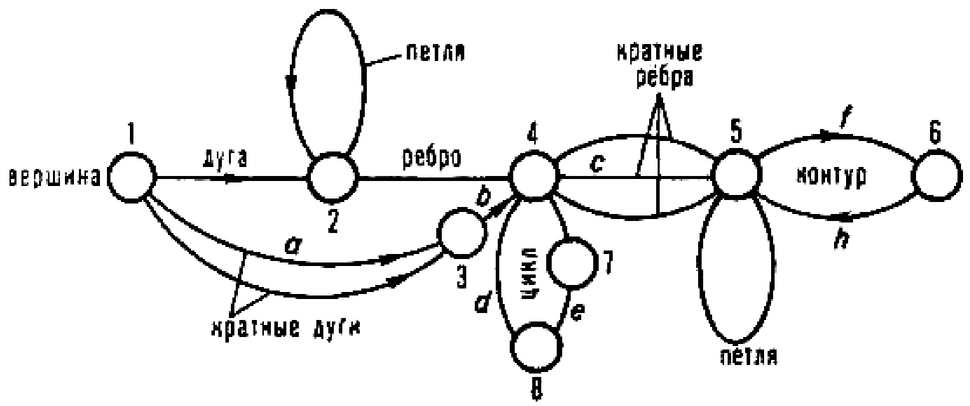
Гамильтонов цикл – цикл, который содержит все вершины графа.

Ориентированный маршрут – маршрут, ребра которого являются дугами.

Путь – маршрут, не содержащий повторяющихся дуг.

Простой путь – путь, не содержащий повторяющихся вершин.

Контур – замкнутый путь.



Простой контур – простой замкнутый путь.

Подграф – часть графа, которая, наряду с некоторым подмножеством ребер графа, содержит и все инцидентные им вершины.

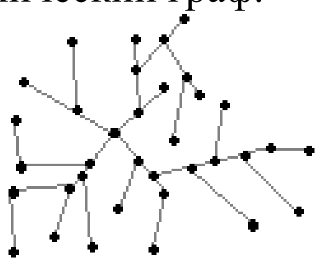
Сверхграф – исходный граф по отношению к его подграфу.

Связный граф – граф, любая пара вершин которого связана.

Циклический граф – граф, содержащий циклы.

Ациклический граф – граф, не содержащий циклов.

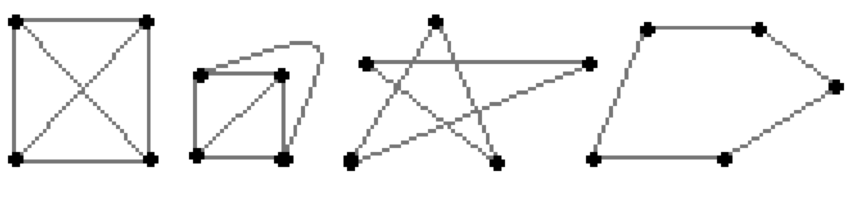
Дерево – связный ациклический граф.



Последовательное дерево – представляет собой простую цепь.

Звездное дерево – дерево, в котором одна из вершин (центр) смежна со всеми остальными вершинами.

Плоский граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер (если его можно расположить на плоскости так, чтобы ребра пересекались только в вершинах.). (a3.gif)

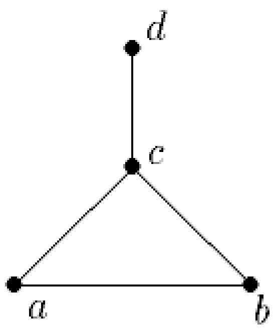


1. Способы задания графа

1. ***Явное задание графа как алгебраической системы.***
2. ***Геометрический***
3. ***Матрица смежности***
4. ***Матрица инцидентности***

Рассмотрим различные способы задания для одного и того же графа.

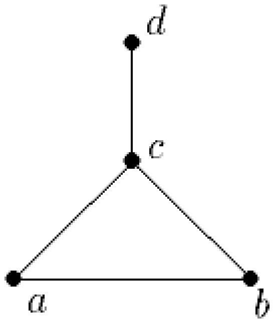
1. $\langle\{a,b,c,d\},\{u,v,w,x\}; \{(u,a),(u,b),(v,b),(v,c),(w,c),(w,a),(x,c),(x,d)\}\rangle$. Так как мы рассматриваем только простые графы, граф нам проще определять как модель, носителем которой является множество вершин, а отношение – бинарное отношение смежности вершин. Тогда данный граф запишется как $\langle\{a,b,c,d\}; \{(a,b), (b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a),(c,d),(d,c)\}\rangle$. В таком представлении ребру соответствуют две пары вершин (v_1,v_2) и (v_2,v_1), инцидентных данному ребру. Чтобы задать такое представление, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром. Для данного графа рёбра задаются множеством $\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,d\}\}$ и граф мы будем записывать как пару (V,E), где V – множество вершин, а E – множество рёбер.
2. ***Геометрический***



3. ***Матрица смежности***

0	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**

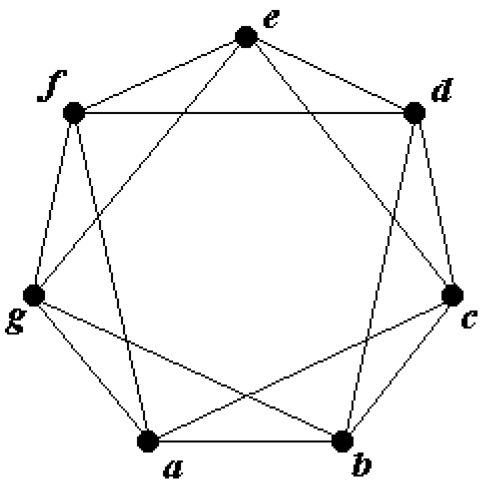
1	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**

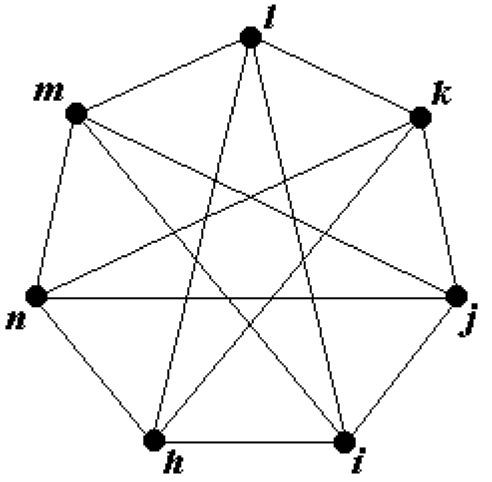


4. Матрица инцидентности

	[illegible]	**v**	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	**0**	1	[illegible]
[illegible]	[illegible]	1	1	[illegible]
[illegible]	[illegible]	1	[illegible]	1
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1

1.1 *Постройте изоморфизм графов*

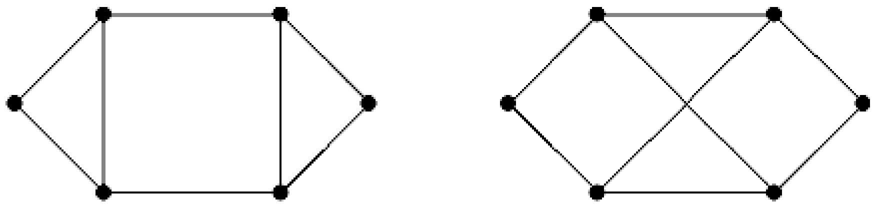




Определение 1 (Степень вершины).

Степенью вершины назовём удвоенное количество петель, инцидентных этой вершине плюс количество остальных инцидентных ей рёбер.

Проверьте, изоморфны ли графы



Докажите, что сумма всех степеней вершин графа равна удвоенному количеству рёбер.

Докажите, что в любом графе количество вершин нечётной степени – чётное число

Подграфы

Определение 2 (Подграф). *Подграфом* графа называется граф, являющийся подмоделью исходного графа. Иначе говоря, подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые рёбра (только те, оба конца которых входят в подграф).

Определение 3 (Подграф, порождённый множеством вершин).

Подграфом, порождённым множеством вершин U называется подграф, множество вершин которого – U, содержащий те и только те рёбра, оба конца которых входят в U.

Определение 4 (Остовной подграф). Подграф называется *остовным подграфом*, если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа.

Два последних определения дают два вида максимальности подграфов: максимальность множества вершин и максимальность множества рёбер. Это подтверждают следующие три задачи:

Определение 5 (Полный граф). *Полным* называется граф, в котором каждые две вершины смежны.

Лекция 8

Маршруты, цепи и циклы

Маршруты, цепи и циклы

Определение (Маршрут). ***Маршрутом*** в графе $G = <V, E; I>$ называется последовательность вершин и рёбер вида

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

где $v_i \in V, i \in [0,n],$

$$e_i \in E, (v_{i-1}, e_i),$$

$$(v_i, e_i) \in I, i \in [1,n].$$

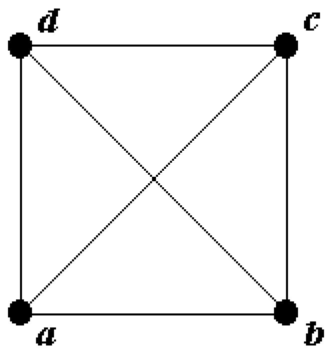
Вершины v_0, v_n называются ***связанными данным маршрутом*** (или просто *связанными*). Вершину v_0 называют *началом*, а v_n – концом маршрута.

Если $v_0 = v_n$, то маршрут называют *замкнутым*. Число n называется *длиной маршрута*.

Определение (Цепь, простая цепь, цикл). Маршрут, в котором все рёбра попарно различны, называется ***цепью***.

Замкнутый маршрут, являющийся цепью, называется ***циклом***. Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называется ***простой цепью.***

Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называется ***простым циклом***.



Пример 2 (цепь). Маршрут $a,\{a,b\},b,\{b,c\},c,\{c,a\},a,\{a,d\},d$ является **цепью**, но не является простой цепью.

В графе на рисунке 1 последовательность вершин

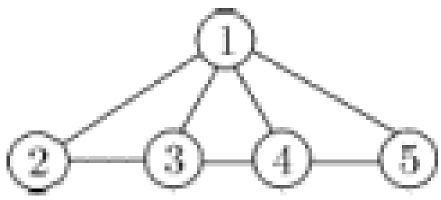
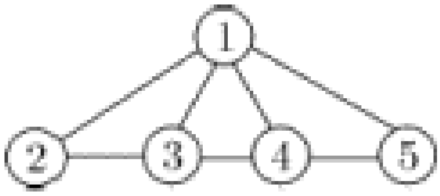


Рисунок 1



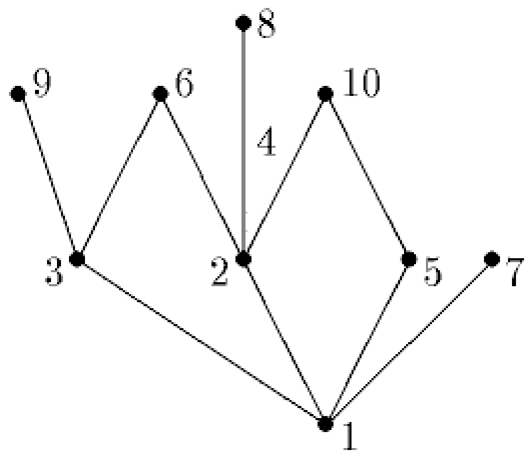
1. 2, 3, 5, 4
2. 2, 3, 4, 5, 1, 4, 3
3. 3, 1, 4, 5, 1, 2
4. 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2
5. 2, 3, 1, 4, 5, 1, 2
6. 2, 3, 4, 5, 1, 2

1) 2, 3, 5, 4 - не маршрут
2) 2, 3, 4, 5, 1, 4, 3 - маршрут, но не путь;
3) 3, 1, 4, 5, 1, 2 - путь, но не простой;
4) 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2 - замкнутый маршрут, но не цикл;
5) 2, 3, 1, 4, 5, 1, 2 - цикл, но не простой;
6) 2, 3, 4, 5, 1, 2 - простой цикл.

•

Графы часто используют для изображения различных отношений (например, иерархических отношений, т.е., на языке математики – отношений частичного порядка). Правда, для точного представления таких графов необходимо выразить понятие ***направления*** на графе. Мы не будем сейчас вводить новые понятия, а будем просто использовать расположение вершин на рисунках (одна выше или ниже другой).

Пример (граф отношения делимости). Построим граф, изображающее отношение делимости на множестве $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Принцип такой: если от одного числа до другого есть цепь, ведущая вверх, тогда второе число делится на первое.



•

Связность графа

Определение (Связность). Граф называется *связным*, если любая пара его вершин связана.

Покажите, что отношение связанности вершин является отношением эквивалентности

Определение (Связные компоненты). *Связными компонентами* графа называются подграфы данного графа, вершины которых являются классами эквивалентности отношения связанности в данном графе.

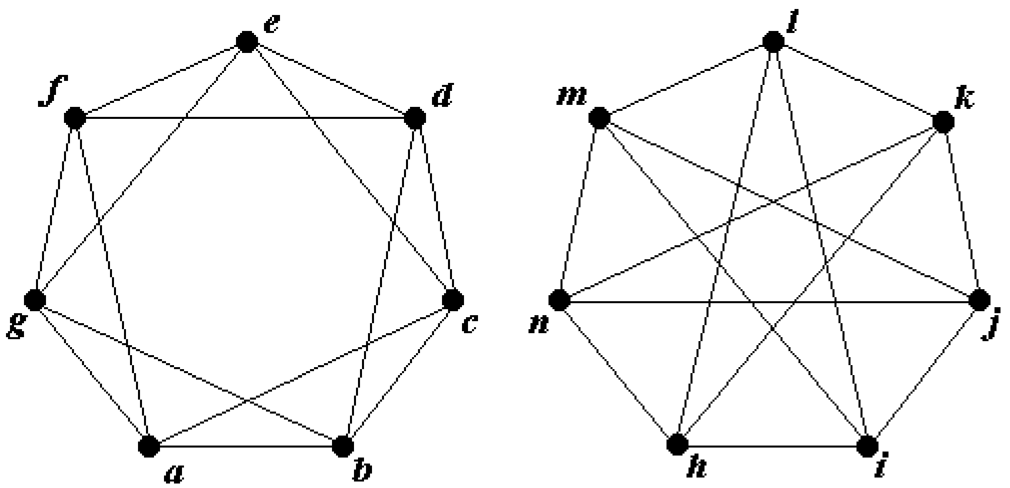
Докажите, что связная компонента является связным графом.

Определение (Цикломатическое число). ***Цикломатическим числом*** графа называется число связных компонент графа плюс число рёбер минус число вершин.

Эйлеровы и гамильтоновы циклы

Определение (Эйлеров цикл). ***Эйлеровым*** называется цикл, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз. Граф, имеющий эйлеров цикл, тоже будем называть эйлеровым.

Пример 4 *(эйлеров цикл).* Постройте эйлеров цикл для второго графа из задачи 1.1.



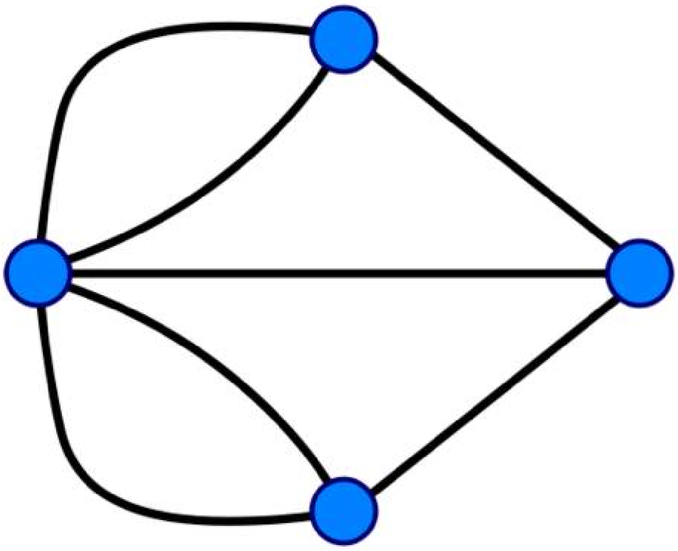
Это h, $\{h,l\}$, l, $\{l,i\}$, i, $\{i,m\}$, m, $\{m,j\}$, j, $\{j,n\}$, n, $\{n,k\}$, k, $\{k,h\}$, h, $\{h,i\}$, i, $\{i,j\}$, j, $\{j,k\}$, k, $\{k,l\}$, l, $\{l,m\}$, m, $\{m,n\}$, n, $\{n,h\}$, h.

Демонстрация эйлерова цикла (a7.gif)

•

Теорема 1 (Критерий эйлеровости графа). *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин – чётные числа.*

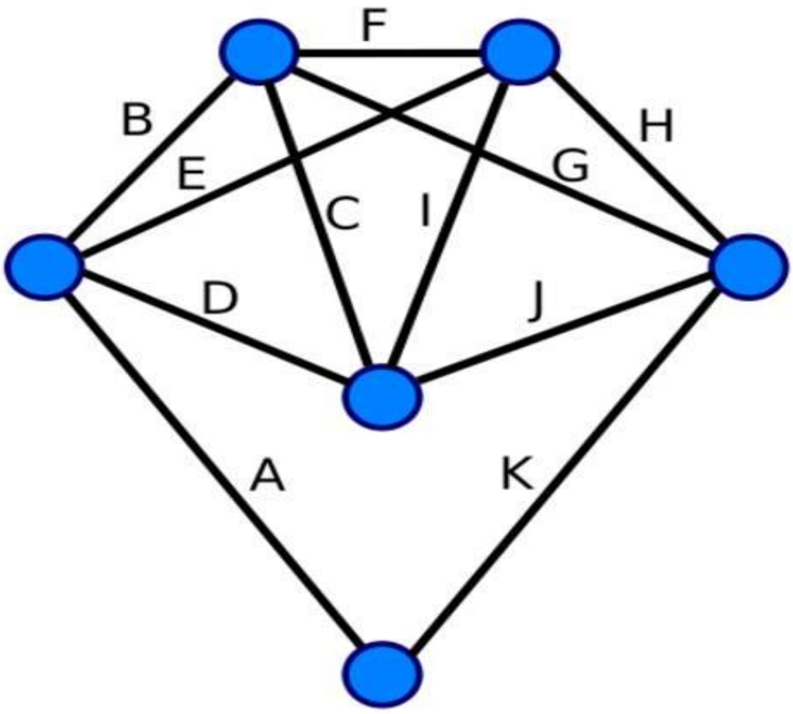
Кроме понятия ***эйлерова цикла*** в задачах часто возникает необходимость нахождения цепи, проходящей по каждому ребру ровно один раз (снимается требование замкнутости). Такие цепи будем называть ***эйлеровыми цепями***.



Граф Кёнигсбергских мостов. Этот граф не является эйлеровым, поэтому решения не существует.

Докажите, что в связном графе существует эйлерова цепь тогда и только тогда, когда граф содержит не более двух вершин нечётной степени

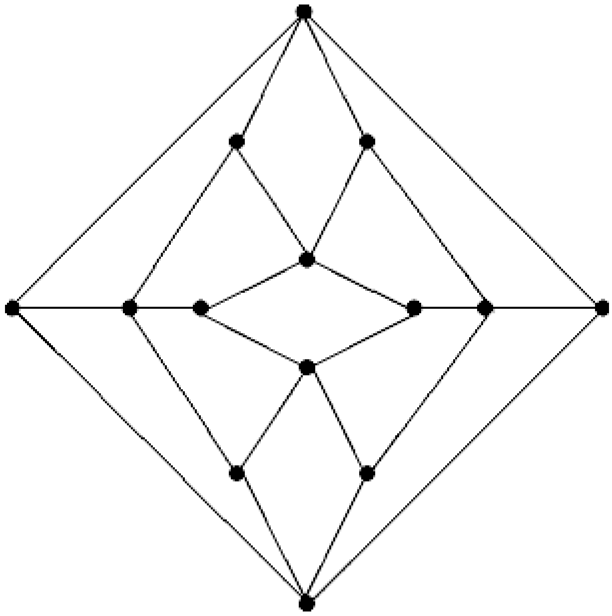
Является ли граф эйлеровым?

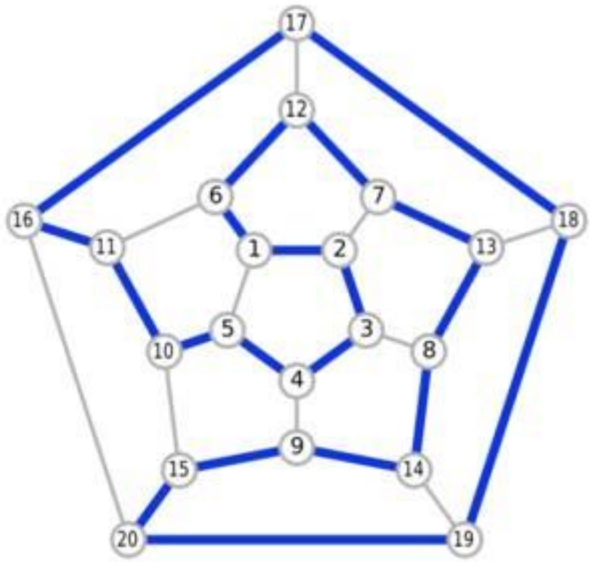


Каждая вершина этого графа имеет чётную степень, поэтому этот граф — эйлеров. Обход рёбер в алфавитном порядке даёт эйлеров цикл.

Определение (Гамильтонов цикл). ***Гамильтоновым*** называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

Содержит ли гамильтонов цикл граф ромбического додекаэдра:





Граф додекаэдра с выделенным циклом Гамильтона

Связность. Достижимость

Путем (или ориентированным маршрутом) ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

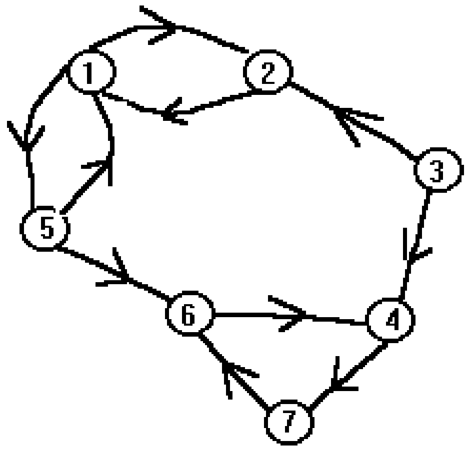
Простой путь - это путь, в котором каждая дуга используется не более одного раза.

Элементарный путь - это путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза.

Если существует путь из вершины графа **v** в вершину **u**, то говорят, что u достижима из **v**. Матрицу достижимостей **R** определим следующим образом:

R[v,u]=

$$\begin{cases} 1, & \text{если вершина с номером u достижима из v} \\ 0, & \text{при недостижимости} \end{cases}$$



Множество **R(v)** - это множество таких вершин графа **G**, каждая из которых может быть достигнута из вершины **v**.

Обозначим через **Г(v)** множество таких вершин графа **G**, которые достижимы из **v** с использованием путей длины **1**.
Г²(v) - это **Г(Г(v))**, то есть с использованием путей длины 2 и так далее. В этом случае:

$$\mathbf{R(v)=\{v\}\cup Г(v)\cup Г^2(v)\cup...\cup Г^p(v).}$$

При этом **p** - некоторое конечное значение, возможно, достаточно большое.

Пример (для рисунка).

$$R(1)=\{1\}\cup\{2,5\}\cup\{1,6\}\cup\{2,5,4\}\cup\{1,6,7\}=\{1,2,4,5,6,7\}$$

Выполняя эти действия для каждой вершины графа, мы получаем матрицу достижимостей **R**.

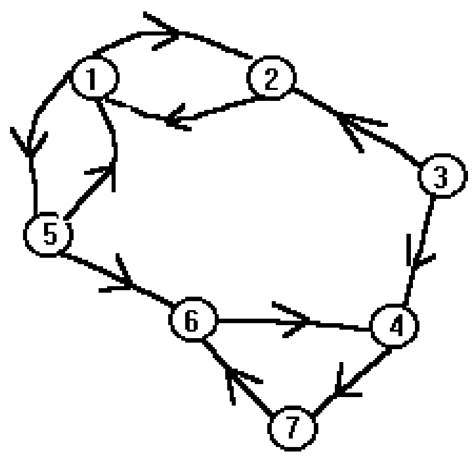
Матрицу контрдостижимостей **Q** определим следующим образом:

Q[v,u]=

$$\begin{cases} 1, & \text{если из } u \text{ можно достигнуть } v \\ 0, & \text{при недостижимости} \end{cases}$$

Множеством **Q(v)** графа **G** является множество таких вершин, что из любой его вершины можно достигнуть вершину **v**. Из определения следует, что столбец **v** матрицы **Q** совпадает со строкой **v** матрицы **R**, то есть $\mathbf{Q=R^t}$, где $\mathbf{R^t}$ - матрица, транспонированная к матрице достижимостей R.

Для примера на рисунке матрицы **A, R** и **Q** имеют вид:



	0 1 0 0 1 0 0		**1 1 0 1 1 1 1**		**1 1 1 0 1 0 0**
	1 0 0 0 0 0 0		**1 1 0 1 1 1 1**		**1 1 1 0 1 0 0**
	0 1 0 1 0 0 0		**1 1 1 1 1 1 1**		**0 0 1 0 0 0 0**
A=	**0 0 0 0 0 0 1**	**R=**	**0 0 0 1 0 1 1**	**Q=**	**1 1 1 1 1 1 1**
	1 0 0 0 0 1 0		**1 1 0 1 1 1 1**		**1 1 1 0 1 0 0**
	0 0 0 1 0 0 0		**0 0 0 1 0 1 1**		**1 1 1 1 1 1 1**
	0 0 0 0 0 1 0		**0 0 0 1 0 1 1**		**1 1 1 1 1 1 1**

Дополнения.

1. Граф называется ***транзитивным***, если из существования дуг **(v,u)** и **(u,t)** следует существование дуги **(v,t)**.

Транзитивным замыканием графа **G=(V,E)** является граф **Gz=(V,E∪E')**, где **E'** - минимально возможное множество дуг, необходимых для того, чтобы граф **Gz** был транзитивным.

Разработать программу для нахождения транзитивного замыкания произвольного графа **G**.

2. **R(v)** - множество вершин, достижимых из **v**, а Q(u) - множество вершин, из которых можно достигнуть **u**.

Определить, что представляет из себя множество **R(v)∩Q(u)**. Разработать программу нахождения этого типа множеств.

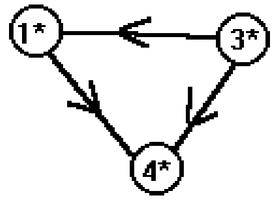
Определение связности

Определения. **Неориентированный граф G** связен, если существует хотя бы один путь в G между каждой парой вершин **i** и **j**.

Ориентированный граф G связен, если неориентированный граф, получающийся из **G** путем удаления ориентации ребер, является связным.

Ориентированный граф **сильно связен**, если для каждой пары вершин i и j существует, по крайней мере, один ориентированный путь из i в j и, по крайней мере, один из j в i. Максимальный связный подграф графа G называется связной компонентой графа G. Максимальный сильно связный подграф называется сильно связной компонентой.

Рассмотрим алгоритм нахождения сильных компонент графа. Идея достаточна проста.



Для вышеприведенного примера значение **R(1)={1}∪{2,5}∪{6}∪{4}∪{7}={1,2,4,5,6,7}, а Q(1)={1} ∪ {2,5} ∪{3}.**

Пересечение этих множеств дает множество C(1)={1,2,5} вершин графа G, образующих сильную компоненту, которой принадлежит вершина графа с номером 1.

Продолжим рассмотрение: **R(3)={1,2,3,4,5,6,7}, Q(3)={3} и C(3)={3}; R(4)={4}∪{7}∪{6}={4,6,7} и Q(4)={4}∪{6}∪{7}={4,6,7}** и **C(4)={4,6,7}.**

Итак, мы нашли сильные компоненты графа G.

Граф **G*=(V*,E*)** определим так: каждая его вершина представляет множество вершин некоторой сильной компоненты графа G, дуга (i*, j*) существует в G* тогда и только тогда, когда в G существует дуга (i,j), такая, что i принадлежит компоненте, соответствующей вершине i*, а j - компоненте, соответствующей вершине j*.

Граф G* называется ***конденсацией*** графа G.

Дополнения.

1. Доказать, что в конденсации графа не содержится циклов.

2. Доказать, что в ориентированном графе каждая вершина i может принадлежать только одной сильной компоненте.

3. В графе есть множество вершин P, из которых достижима любая вершина графа и которое является минимальным в том смысле, что не существует подмножества в P, обладающего таким свойством достижимости.

Это множество вершин называется ***базой графа***. Показать, что в P нет двух вершин, которые принадлежат одной и той же сильной компоненте графа G.

Показать, что любые две базы графа **G** имеют одно и то же число вершин.

Разработать программу нахождения базы графа. Схема решения. База P* конденсации G* графа G состоит из таких вершин графа G*, в которые не заходят ребра. Следовательно, базы графа G можно строить так: из каждой сильной компоненты графа G, соответствующей вершине базы P* конденсации G*, надо взять по одной вершине - это и будет базой графа G.

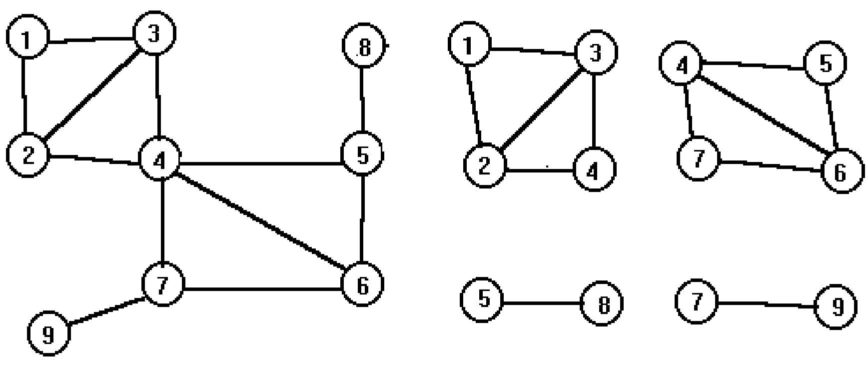
Двусвязность

Иногда недостаточно знать, что граф связен. Может возникнуть вопрос, насколько “сильно связен” связный граф. Например, в графе может существовать вершина, удаление которой вместе с инцидентными ей ребрами разъединяет оставшиеся вершины. Такая вершина называется ***точкой сочленения****, или* ***разделяющей вершиной.***

Граф, содержащий точку сочленения, называется ***разделимым***.

Граф без точек сочленения называется ***двусвязным*** *или* ***неразделимым****. Максимальный двусвязный подграф графа называется двусвязной компонентой или блоком.*

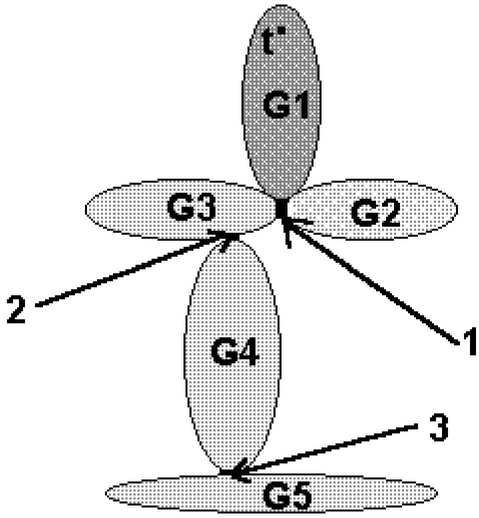
Пример. Разделимый граф и его двусвязные компоненты. ***Точки сочленения*** вершины с номерами 4, 5 и 7.



Точку сочленения можно определить иначе.

Вершина ***t*** является ***точкой сочленения***, если существуют вершины **u** и **v**, отличные от **t**, такие, что каждый путь из **u** в **v** (предполагаем, что существует, по крайней мере, один) проходит через вершину с номером t.

Наша задача - найти ***точки сочленения*** и ***двусвязные компоненты*** графа.



Основная идея. Есть двусвязные компоненты **G1, *G2, G3, G4*** и ***G5*** и точки сочленения **1**, **2, 3**.

Осуществляем поиск в глубину из вершины **t**, принадлежащей **G1**.

Мы можем перейти из G1 в G2, проходя через вершину 1. Но по свойству поиска в глубину все ребра G2 должны быть пройдены до того, как мы вернемся в 1.

Дополнение. ***Мостом*** графа G называется каждое ребро, удаление которого приводит к увеличению числа связных компонент графа. Разработать программу нахождения всех мостов графа. Покажите, что мосты графа должны быть в каждом каркасе графа G. Каким образом знание мостов графа может изменить (ускорить) логику нахождения всех его каркасов?

Циклы

Эйлеровы циклы

Определение. **Эйлеров цикл** — это такой цикл, который проходит ровно один раз по каждому ребру.

Теорема. ***Связный неориентированный граф G*** содержит ***эйлеров цикл*** тогда и только тогда, когда число вершин нечетной степени равно нулю.

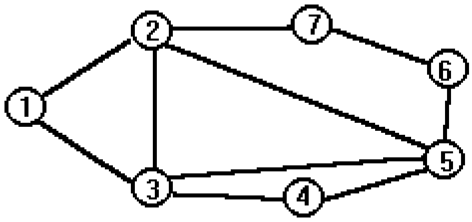
Не все графы имеют эйлеровы циклы, но если эйлеров цикл существует, то это означает, что, следуя вдоль этого цикла, можно нарисовать граф на бумаге, не отрывая от нее карандаша.

Дан граф G, удовлетворяющий условию теоремы. Требуется найти эйлеров цикл. Используется просмотр графа методом поиска в глубину, при этом ребра удаляются.

Порядок просмотра (номера вершин) запоминается. При обнаружении вершины, из которой не выходят ребра, мы их удалили, ее номер записывается в стек, и просмотр продолжается от предыдущей вершины. Обнаружение вершин с нулевым числом ребер говорит о том, что найден цикл. Его можно удалить, четность вершин (количество выходящих ребер) при этом не изменится.

Процесс продолжается до тех пор, пока есть ребра. В стеке после этого будут записаны номера вершин графа в порядке, соответствующем эйлерову циклу.

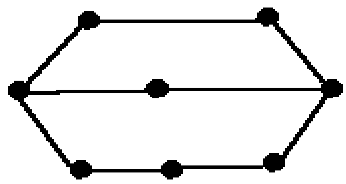
Пример графа и содержимое стека Cv.



Cv: 1 3 5 6 7 2 5 4 3 2 1

Гамильтоновы циклы

Определение. Граф называется ***гамильтоновым***, если в нем имеется цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам цикл также называется гамильтоновым.
Не все связные графы гамильтоновы.

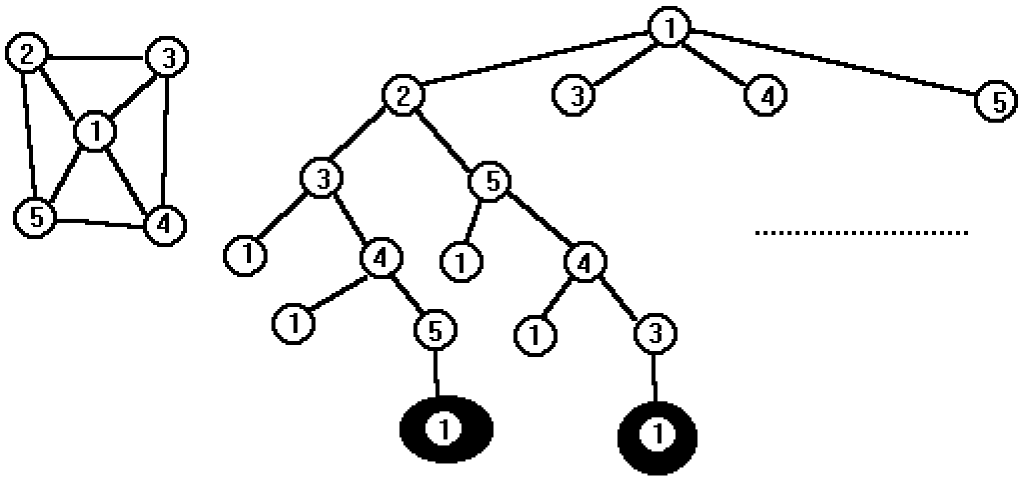


Дан связный неориентированный граф G. Требуется найти все гамильтоновы циклы графа, если они есть.

Метод решения - перебор с возвратом (backtracking). Начинаем поиск решения, например, с первой вершины графа. Предположим, что уже найдены первые k компонент решения. Рассматриваем ребра, выходящие из последней вершины.

Если есть такие ребра, что идут в ранее не просмотренные вершины, то включаем эту вершину в решение и помечаем ее как просмотренную. Получена (k+1) компонента решения. Если такой вершины нет, то возвращаемся к предыдущей вершине и пытаемся найти ребро из нее, выходящее в другую вершину.

Решение получено при просмотре всех вершин графа и возможности достичь из последней первой вершины. Решение (цикл) выводится, и продолжается процесс нахождения следующих циклов. Пример графа и часть дерева, показывающего механизм работы данного метода.



Лекция 9

Элементы комбинаторики

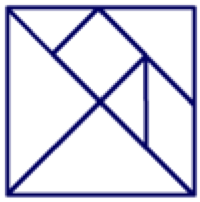
Определение: **Комбинаторика** - это раздел математики, который ориентирован на решение задач выбора элементов из заданного конечного множества и расположения их в группы по заданным правилам и ограничениям.

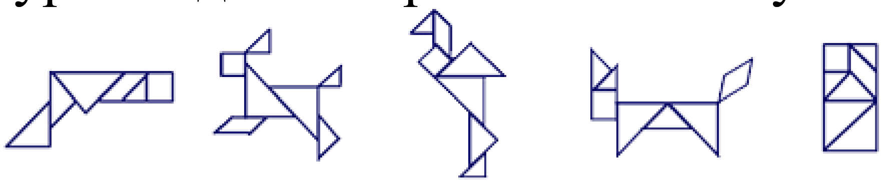
Этот раздел математики тесно связан с рядом других разделов математики: теорией вероятностей, теорией графов, теорией чисел, теорией групп и т. д.

Историческая справка: так как комбинаторика - это наука про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, то с задачами в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшее расположение охотников на охоте, наилучшее расположение воинов во время битвы.

Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Ведь для игр в нарды, шашки, шахматы, которые появились позднее приходилось рассматривать различные сочетания передвигаемых фигур и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрывающих комбинаций. С комбинаторикой люди сталкивались во всем мире.

В Китае первое упоминание о задачах, близких к комбинаторным встречается в китайских рукописях, относящихся к 12-13 вв до н.э. В этих книгах писалось, что все в мире является соединением двух начал – мужского и женского, которое авторы обозначали символами ⚊ и ⚋. В знаменитой китайской «Книге перемен» показаны различные соединения этих знаков шесть, размещенных в самых различных комбинациях, например: ䷀ , ䷁ , ䷦ и т. п. По теории «Книги Перемен», весь мировой процесс представляет собою чередование ситуаций, происходящее от взаимодействия и борьбы сил света и тьмы, напряжения и податливости, и каждая из таких ситуаций символически выражается одним из этих знаков, которых в «Книге Перемен» всего 64. Они рассматриваются как символы действительности и называются гексаграммами.

Из Китая к нам пришла интересная комбинаторная головоломка танграм. Квадрат разрезают на 7 частей. В результате пулучается 2 больших, 1 средний и 2 маленьких треугольника, квадрат и параллелограмм. Из полученных фигур складывают различные силуэты, 

,

что тоже требует комбинаторных навыков.

Комбинаторика развивалась и в Древней Греции. Хотя говорить об уровне комбинаторных знаний древних греков затруднительно, поскольку Александрийская библиотека, в которой были собраны большинство научных книг – практически все научное наследие того времени, насчитывающее много тысяч томов, погибла при взятии Александрии.

Материалы для Исторической справки взяты из книги Н.Я. Виленкина «Популярная комбинаторика» Изд. «Наука» Москва 1975 г.

Основные правила комбинаторики

Очень часто встречаются задачи, в которых необходим подсчет количества комбинаций, которые можно составить из заданных объектов конечного множества, безразлично какой природы, которые подчинены каким то условиям. Для успешных решений этих задач необходимо знать основные правила и формулы комбинаторики.

Пусть задано множество, содержащее конечное число элементов. (Студенты в группе, яблоки в корзине, набор костей домино и т.д.). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – элементы некоего конечного множества. Сформулируем два важных правила, которые применяются в комбинаторике:

Правило суммы: Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способом, элемент a_2 может быть выбран другими n_2 способами, элемент a_3 может быть выбран отличными от первых двух n_3 способами и т.д., элемент a_k – n_k способами, отличными от первых (k-1) способа, то выбор одного из элементов: или a_1, или a_2,…, или a_k может быть осуществлен $n_1+n_2+\ldots+n_k$ способами.

Примеры.

1. В ящике 300 деталей. Известно, что 180 из них – 1-го сорта, 100 – 2 –го сорта, а остальные – 3-го сорта. Сколько существует способов извлечения из ящика детали 1-го или 2-го сорта?

Решение. Деталь первого сорта может быть извлечена $n_1=180$ способами, 2-го сорта – $n_2=100$ способами. По правилу суммы существует $n_1+n_2=280$ способов извлечения из ящика детали 1-го или 2-го сорта.

2. В корзине 12 роз, 13 пионов и 23 гвозди-

ки. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины?

Решение. Роза может быть извлечена $n_1=12$ способами, пион – $n_2=13$ способами, а гвоздика – $n_3=23$ способами. По правилу суммы существует $n_1+n_2+n_3=48$ способов, которыми можно выбрать один цветок из корзины.

Правило произведения: Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способом, после каждого такого выбора элемент a_2 может быть выбран n_2 способами, и т.д., элемент a_k – n_k способами, то выбор всех элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ может быть осуществлен $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Примеры.

а) при подбрасывании трёх монет возможно

$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 = 8}$ различных результата

б) бросая дважды игральную кость, получим

$6 \cdot 6=36$ различных результатов

в) трёхзначных чисел бывает

$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$;

г) трёхзначных чисел, все цифры которых различны, существует

$9 \cdot 9 \cdot 8$;

д) чётных трёхзначных чисел возможно

$9 \cdot 10 \cdot 5$;

Пример.

В группе 24 человека. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

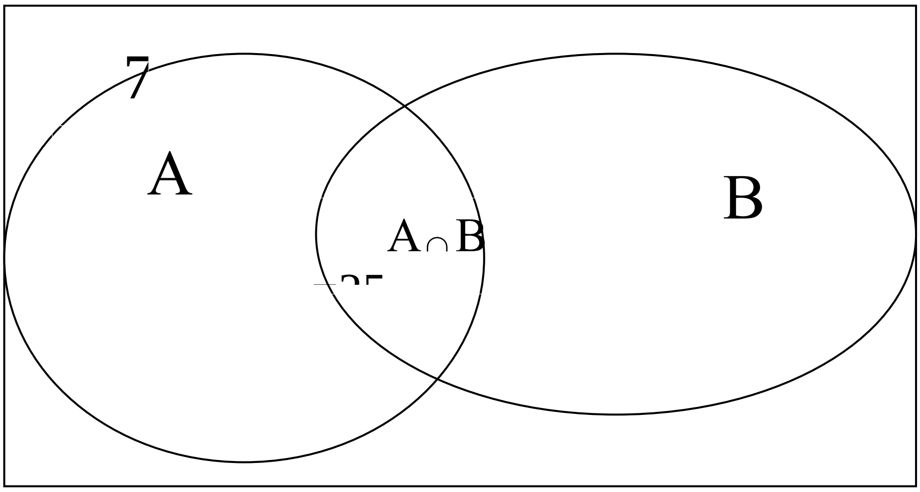
Решение. Старостой может быть выбран любой из 24 учащихся, его заместителем – любой из 23 оставшихся , а профоргом – любой из оставшихся 22 учащихся, т.е. $n_1=24$, $n_2=23$, а $n_3=22$. По правилу произведения общее число способов выбора старосты, его заместителя и профорга равно $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3=24 \cdot 23 \cdot 22=12\,144$ способов.

Главная теорема комбинаторики (Теорема о включениях и исключениях)

П р и м е р

На предприятии работает 70 человек. Из них 50 знают английский, 35 – немецкий и 25 – оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого?

Решение: Построим диаграмму, на которой изобразим прямоугольник, соответствующий общему числу работающих (70) и две пересекающиеся области А и В по 50 и 35 человек (знающих английский и немецкий языки). На диаграмме общая часть этих двух областей соответствует 25 – количеству работающих, которые знают оба языка. Требуется найти область прямоугольника, не входящую ни в область А, ни в область В.



Очевидно, что N = 70 – 50 – 35 + 25 = 10.

Главная теорема комбинаторики (Теорема о включениях и исключениях)

Пусть имеется множество из N объектов произвольной природы. На этом множестве пусть задано n свойств. Каждый объект может обладать либо не обладать некоторыми из этих свойств. Сами свойства обозначим: $a_1, a_2, ..., a_n$. Будем обозначать N(a_i) – количество объектов точно обладающих свойством a_i и может быть какими-то другими, а N ($\overline{a_i}, \overline{a_j}$) – число объектов не обладающих ни свойством a_i, ни свойством a_j. Тогда число объектов, не обладающих ни одним из перечисленных свойств:

$$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, ..., \overline{a_n}) = N - N(a_1) - N(a_2) - ... - N(a_n) + N(a_1, \grave{a}_2) + ... + N(a_1, a_n) + \qquad \textbf{(1)}$$
$$+ N(a_2, a_3) + ... + N(a_{n-1}, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) - ...... + (-1)^n N(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

Продолжение примера. Пусть теперь 21 человек знают французский, 12 – английский и французский, 10 – английский и немецкий и 5 – все три языка.

Тогда в соответствии с теоремой количество человек, не знающих ни одного из трех перечисленных языков (но может быть знающих китайский язык), равно $N = 70 - 50 - 35 - 21 + 25 + 12 + 10 - 5 = 6$.

Перестановки

Определение: **Перестановки –** это выборки (комбинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n («пэ из эн») и вычисляется по формуле

$$\mathbf{P_n = n!}, \qquad \mathbf{(2)}$$

где $n!$ - произведение $n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\ldots3*2*1$.

Доказательство: У нас есть n способов выбрать (взять и поставить в ряд) первый предмет (назовем это первым этапом выбора). Далее у нас есть, независимо от того, как выбран первый предмет, n-1 способов взять второй предмет - в любом случае, это может быть какой угодно предмет, кроме первого выбранного. Затем есть n-2 способа взять третий предмет - он может быть какой угодно, кроме первых двух выбранных... и так далее. Итого, мы имеет n этапов выбора, на каждом из которых число вариантов равно (независимо от того, как сделан выбор на предыдущих этапах), соответственно, n, n-1, n-2,..., 1. Поэтому, согласно правилу произведения, мы получаем общее число перестановок из n элементов n(n - 1)(n - 2)(n - 3)…3*2*1., ч.т.д.

Комбинаторный смысл числа перестановок прост: сколькими способами можно упорядочить конечное n-элементное множество.

Примеры.

1.Сколько перестановок можно составить из 2-х-элементного множества?

P_2= 2!=2. Действительно, существует две такие перестановки: (a,b), (b,a).

Из трехэлементного множества можно составить

P_3=3!=6 перестановок: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

2. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $P_5=5!=120$.

Определение: Если в перестановке из общего числа элементов **n** есть **к** различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз, k-й элемент - n_k раз, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то такие перестановки называются **перестановками с повторениями** из n элементов. Число перестановок с повторениями из n элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \qquad \textbf{(3)}$$

Примеры .

1.Сколько существует пятизначных чисел, состоящих из цифр 7,8,9, в которых цифра 8 повторяется 3 раза, а цифры 7 и 9 по одному разу.

Решение. Каждое пятизначное число отличается от другого порядком следования цифр, причем $n_1=1$, $n_2=3$, а $n_3=1$, а их количество равна 5, т.е. является перестановкой с повторениями из 5 элементов. Их число находим по формуле (3)

$$P_5(1,3,1)=\frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!}=20\ .$$

2. На карточках написаны буквы М,А,Т,Е,М,А,Т,И,К,А. Сколько различных 10-ти буквенных «слов» можно составить из этих карточек? (здесь и далее словом считается любая последовательность букв русского алфавита)

Решение. Перестановка двух букв М, осуществляемая P_2= 2 способами, трех букв А, осуществляемая P_3= 3!=6 способами и перестановка двух букв Т, осуществляемая P_2= 2 способами не меняет составленное из карточек слово. $P_{10}(2,3,2)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151\,200$ слов.

Примеры .

1.К одному человеку в гости пришли 6 его друзей. Все они ужинали за круглым столом. Время ужина пролетело незаметно, и хозяин сказал гостям, что он будет рад видеть их у себя за ужином столько раз, сколько различных перестановок за этим столом они смогут образовать. Друзья, конечно, согласились. Сколько раз придется кормить своих друзей ужином радушному хозяину?

2.

Решение: Так как всего за круглым столом сидело 7 человек: 6 гостей и сам хозяин, то число перестановок равно $P_{7\,\text{ïî êðóãó}} = \frac{7!}{7} = 6!$ =720. Т.е. 720 совместных ужинов.

Размещения.

Определение: **Размещениями** из n элементов по k элементов будем называть упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов, множества , состоящего из n элементов. Число размещений из n элементов по k элементов обозначается $\grave{A}_n^k$ (читается "A из n по k").

Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета размещений

1) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 5 кандидатов и назначить их на 5 различных должностей?

2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 и расставить их в ряд на полке?

В задачах о размещениях полагается k<n. В случае, если k=n, то легко получить

$$\grave{A}_n^n = P_n = n!$$

Число размещений из n элементов по k элементов вычисляется по формуле

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad \mathbf{(5).}$$

Примеры.

1. Студенты второго курса изучают 10 различных дисциплин. Определить – сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в понедельник планируется поставить 5 пар?

Решение: Каждый вариант расписания представляет собой выборку 5 элементов из 10, причем эти варианты отличаются друг от друга не только выбором этих дисциплин, но и порядком их следования, т.е. является размещением из 10 элементов по 5.

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240.$$

2. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4 различных страны?

Решение: $$\grave{A}_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Сочетания.

Определение: **Сочетаниями** из n элементов по m элементов будем называть любое подмножество, состоящие из m элементов, множества , состоящего из n элементов. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается $\tilde{N}_n^k$ (читается "це из эн по ка").

Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (\mathrm{n - m})!} \qquad (7).$$

Примеры.

1. Из группы 35человек нужно выбрать троих для поездки в Крым. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Если выбирать их последовательно, то получим $35 \cdot 34 \cdot 33$ варианта. Но так как для нас порядок выбора не имеет значения, а имеет значение только состав выбранной бригады, поэтому полученный результат нужно еще разделить на 3!. Т.е. получим $\frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3!} = 6545$ вариантов. Или можно было сразу воспользоваться формулой $C_{35}^{3} = \frac{35!}{3! \cdot (35 - 3)!} = 6545$.

2. В середине 60 годов в России появилась лотерея, которая была названы “Спортлото”: лотерея 5/36 . Играющий покупал билет, на котором имелось 36 клеточек. Каждая клеточка соответствовала какому-либо виду спорта. Нужно было выделить (зачеркнуть) 5 из этих клеточек и отправить организаторам лотереи. После розыгрыша лотереи объявлялись пять выигравших номеров. Награждался угадавший все пять номеров, четыре номера и даже угадавший три номера. Соответственно, чем меньше угадано номеров (видов спорта), тем меньше был выигрыш.

Подсчитаем, сколько существует разных способов заполнения карточек “Спортлото” при условии, что используется лотерея 5/36. Казалось бы, заполняя последовательно номер за номером, получим: $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32$. Но ведь порядок заполнения не имеет значения, тогда получаем:

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!\cdot 31!} = 376992 \; .$$

Данный результат означает, что если все участники лотереи заполняют карточки по-разному, то в среднем один из примерно 377 тысяч человек угадает все 5 номеров.

А сколько человек в среднем угадают 4 номера? $C_5^4 \cdot \tilde{N}_{31}^1 = \frac{5!}{4!\cdot 1!} \cdot \frac{31!}{1!\cdot 30!} = 31 \cdot 5 = 155$.

Итого, в среднем 155 человек из примерно 377 000 угадают 4 номера.

Определение: сочетания, содержащие m элементов, в которых любой элемент может присутствовать некоторое число раз, не превосходящее m, называются ***сочетаниями из n элементов по m с повторениями***.

Например: соединения {a, a}, {a, b}, {a, c}, {b, b}, {b, c}, {c, c} – *сочетания из 3 элементов* {a, b, c} *по два с повторениями* (в соединение могут входить два одинаковых элемента).

Подсчет числа сочетаний с повторениями осуществляется по формуле :

$$\overline{C_n^m} = \frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(\mathrm{n}-1)!} = C_{m+n-1}^{m} \qquad \textbf{(8).}$$

Примеры

1.Сколькими способами можно выбрать 4 монеты из четырех пятикопеечных монет и из четырех двухкопеечных монет?

Решение: порядок выбора монет неважен, и примерами соединений могут являться {5,5,5,5}, {2,2,2,2}, {5,2,5,5} и т.д. Это задача о числе сочетаний из двух видов монет по четыре с повторениями.

$\overline{C_2^4} = \frac{(4+2-1)!}{4!\cdot(2-1)!} = 5$ способов.

2. В кондитерской имеется 5 разных сортов пирожных. Сколькими способами можно выбрать набор из 4 пирожных?

Решение: это задача о числе сочетаний из 5 видов пирожных по 4 с повторениями.

$\overline{C_5^4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\cdot(5-1)!} = 70$ способов

3. Сколько всего чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Решение: это задача о числе сочетаний из 5 цифр по одному, по два, по три, по четыре и по пяти с повторениями в каждом случае.

$\overline{C_5^1} = \frac{(1+5-1)!}{1!\cdot(5-1)!} = 5$; $\overline{C_5^2} = \frac{(2+5-1)!}{2!\cdot(5-1)!} = 15$; $\overline{C_5^3} = \frac{(3+5-1)!}{3!\cdot(5-1)!} = 35$;

$\overline{C_5^4} = \frac{(4+5-1)!}{4!\cdot(5-1)!} = 70$; $\overline{C_5^5} = \frac{(5+5-1)!}{5!\cdot(5-1)!} = 126$

Согласно правилу сложения: 5+15+35+70+126=251 чисел.

Сходства и различия в определениях сочетаний и размещений.

Сходства. Сочетания и размещения – это подмножества, состоящие из m элементов n-элементного множества. В них имеет значение порядок следования элементов последовательности.

Различия. В размещении важен порядок расположения элементов, а в сочетаниях порядок не важен.

Сочетания	Размещения
1. Сколько рукопожатий получится, если здороваются 6 человек? {Дима, Антон} = {Антон, Дима} – одно и тоже Значит, порядок неважен, значит это подмножество по два элемента из 6, значит это сочетание из шести по два $C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$	1. Сколькими способами шесть человек могут обменяться фотографиями? { Дима, Антон } ≠ { Антон, Дима } – разные обмены Значит, порядок важен, значит это последовательность по два элемента из 6, значит это размещение из шести по два $\grave{A}_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 5\cdot 6 = 30$
2. Сколько аккордов можно сыграть с помощью трех клавиш из семи? {до, ми, соль} = { до, соль, ми } – одно и тоже Значит, порядок неважен, значит это подмножество по три элемента из семи, значит это сочетание из семи по три $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$	2. Сколько мелодий (трезвучий, проигрышей) можно сыграть с помощью трех клавиш из семи? {до, ми, соль} ≠ { до, соль, ми } – разные мелодии Значит, порядок важен, значит это последовательность по три элемента из семи, значит это размещение из семи по три $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$

Рассмотрим несколько «параллельных» задач:

Свойства сочетаний. Бином Ньютона.

Предполагая, что n и k - целые положительные числа и 0!=1, сформулируем основные свойства сочетаний.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Доказательство:

$\tilde{N}_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot(n-(n-m))!} = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m$. Что и требовалось доказать.

3. $\tilde{N}_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m$.

Доказательство:

$C_n^{m+1} + C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m-1)!\cdot(m+1)!} + \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \dfrac{n!\cdot(n-m+m+1)}{(n-m-1)!\cdot m!\cdot(m+1)\cdot(n-m)} = \dfrac{(n+1)!}{(n-m)!\cdot(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}$

. Что и требовалось доказать.