Лекция 17

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Подразумевая под случайным процессом множество (ансамбль) реализации, необходимо иметь в виду, что реализациям, обладающим различной формой, соответствуют различные спектральные характеристики. Усреднение комплексной спектральной плотности, по всем реализациям, приводит к нулевому спектру процесса (при $\overline{x}=0$) из-за случайности и независимости фаз спектральных составляющих в различных реализациях. Можно, однако, ввести понятие *спектральной плотности среднего квадрата* случайной функции, поскольку величина среднего квадрата не зависит от соотношения фаз суммируемых гармоник. Если под случайной функцией $x(t)$ подразумевается электрическое напряжение или ток, то средний квадрат этой функции можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую в сопротивлении 1 Ом. Эта мощность распределена по частотам в некоторой полосе, зависящей от механизма образования случайного процесса. Спектральная плотность средней мощности представляет собой *среднюю мощность, приходящуюся на 1 Гц при заданной частоте* ω. Введенную таким образом спектральную плотность $W(\omega)$ в дальнейшем будем называть *энергетическим спектром функции* $x(t)$. Смысл такого названия определяется размерностью функции $W(\omega)$, являющейся отношением мощности к полосе частот:

$$[W(\omega)]=\left[\frac{\text{Мощность}}{\text{Полоса частот}}\right]=[\text{Мощность}\times\text{время}]=[\text{Энергия}].$$

Энергетический спектр можно найти, если известен механизм образования случайного процесса. Выделив из ансамбля какую – либо реализацию $x_k(t)$ и ограничив ее длительность конечным интервалом T, можно применить к ней обычное преобразование Фурье и найти спектральную плотность $X_{kT}(\omega)$.. Тогда энергию рассматриваемого отрезка реализации можно вычислить с помощью формулы (2.66): $Э_{kT} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} x_{kT}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|X_{kT}(\omega)\right|^2 d\omega.$ (4.31)

Разделив эту энергию, на T, получим среднюю мощность $k-й$ реализации на отрезке T: $\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|X_{kT}(\omega)\right|^2}{T}d\omega.$

При увеличении T энергия $Э_{kT}$ возрастает, однако отношение $Э_{kT}/T$ стремится к некоторому пределу. Для перехода к стационарному случайному процессу необходимо длительность T каждой реализации устремить к бесконечности. При этом возникает формальная трудность, связанная с тем, что преобразование Фурье существует только для сигналов с конечной энергией (условие абсолютной интегрируемости сигнала). Это препятствие можно обойти с помощью различных приемов [8]. В данном случае ограничимся наложением условия, что T сколь угодно велико, но *конечно.* Имея в виду это условие, запишем последнее выражение для средней мощности $k-й$ реализации в форме $\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_k(\omega)d\omega.$,

(4.32)

где $W_k(\omega) = \left|X_{kT}(\omega)\right|^2 / T.$ (4.33)

представляет собой *спектральную плотность средней мощности* рассматриваемой $k-й$ реализации (при достаточно большом T).

В общем случае величина $W_k(\omega)$ должна быть усреднена по множеству реализации. Ограничиваясь в данном случае рассмотрением *стационарного и эргодического* процесса, можно считать, что найденная усреднением по одной реализации функция $W_k(\omega)$ характеризует весь процесс в целом. Опуская индекс k, получаем окончательное выражение для средней мощности случайного процесса:

$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(\omega)d\omega.$ (4.34)

Если рассматривается случайный процесс с ненулевым средним значением $x(t)$, то энергетический спектр следует представлять в форме

$$W_x(\omega) = \left(\overline{x(t)}\right)^2 \cdot 2\pi\delta(\omega) + W_{\sim}(\omega), \qquad (4.35)$$

где $W_{\sim}(\omega)$ — сплошная часть спектра, соответствующая флуктуационной составляющей x, а $\delta(\omega)$ — дельта - функция.

При интегрировании по $f = \omega/2\pi$ первое слагаемое в правой части дает $\left|\overline{x(t)}\right|^2$, т. е. мощность постоянной составляющей, а второе — мощность флуктуационной составляющей, т. е. дисперсию $\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{\sim}(\omega)d\omega.$ $\qquad (4.36)$

Для процесса с нулевым средним $\overline{x^2(t)} = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)d\omega.$ $\qquad (4.37)$

Из определения энергетического спектра (4.33) очевидно, что $W(\omega)$ является четной и неотрицательной функцией ω.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Чем медленнее изменяется во времени $x(t)$, тем уже энергетический спектр. С другой стороны, скорость изменения $x(t)$ определяет ход корреляционной функции. Очевидно, что между $W_x(\omega)$ и $B_x(\tau)$ имеется тесная связь.

Существует теорема Винера — Хинчина, утверждающая, что $B_x(\tau)$ и $W_x(\tau)$ связаны между собой преобразованиями Фурье;

$$W_x(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \qquad (4.38)$$

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (4.39)$$

Из этих выражений вытекает свойство, аналогичное свойствам преобразований Фурье, установленным в гл. 2 для детерминированных сигналов: *чем шире энергетический спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции, и, соответственно, чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса.*

Большой интерес представляет белый шум, когда энергетический спектр равномерен на всех частотах $-\infty < \omega < \infty$.

Если в выражение (4.39) подставить $W_x(\omega) = W_o = const$, то получим [см. (2.93)]

$$B_x(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau), \qquad (4.40)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция,

Для белого шума с бесконечным и равномерным спектром корреляционная функция равна нулю для всех значений τ, кроме $\tau = 0$, и котором $B_x(0)$ обращается в бесконечность. Подобный шум, имеющий игольчатую структуру с бесконечно тонкими случайными выбросами, иногда называют дельта - коррелированным процессом. Дисперсия белого шума бесконечно велика.

Поясним применение приведенных выше соотношений на примерах.

1. Пусть заданы следующие параметры напряжения шума (нормальный стационарный процесс с нулевым средним); среднеквадратическое значение $u_{ск} = 2B$, энергетический спектр $W_1(\omega)$ равномерен в полосе частот от 0 до $f_1 = 10$

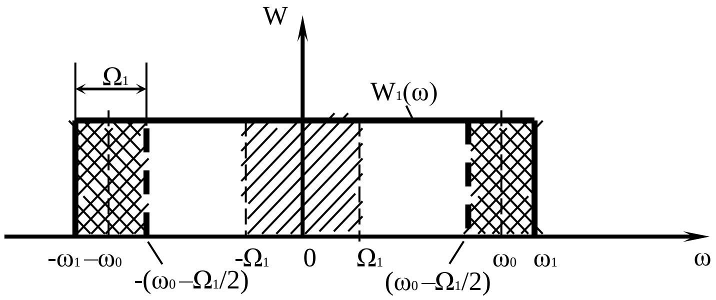

Рис 4.9 Широкополосный и узкополосный энергетический спектры

(сплошная линия на рис. 4.9).

Шум с подобным спектром обычно называют *широкополосным.*

В данном случае $W_1(\omega) = u_{ск}^2 / 2 f_1 = (2)^2 / 2 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^{-7}\ B^2/Гц$.

Корреляционная функция рассматриваемого процесса [см. (4.39)]

$$\begin{aligned} B_1(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W_1(\omega) \cos\omega\tau d\omega = \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \frac{1}{2\pi} \frac{2\sin\omega_1\tau}{\tau} = 2 \cdot 10^{-7} 2 f_1 \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau} = \sigma_1^2 \frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau}. \end{aligned} \qquad (4.41)$$

Дисперсия шума $\sigma_1^2 = u^2{}_{ск} = B_1(0) = 4B^2$.

Нормированная корреляционная функция (рис. 4.10, а)

$$R_1(\tau) = B_1(\tau)/\sigma_1^2 = \sin\omega_1\tau/\omega_1\tau. \qquad (4.42)$$

2. Вырежем из спектра исходного шума полосу от $\omega = -\Omega_1 = -2\pi F_1$, до $\omega = \Omega_1 = 2\pi F_1$,, обозначенную на рис. 4.9 штриховой, и найдем $B_2(\tau)$, $R_2(\tau)$ и σ_2^2 соответствующие этому шуму. При $F_1 = 2$ МГц получим

$$\sigma_2^2 = 2F_1W_1(\omega) = 2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-7} = 0{,}8B^2;$$

$$B_2(\tau) = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\frac{\sin\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau} = 0{,}8\frac{\sin\Omega_1\tau}{\Omega_1\tau};$$

$$R_2(\tau) = B_2(\tau)/\sigma_2^2 = (\sin\Omega_1\tau)/\Omega_1\tau.$$

Сужение спектра привело к растяжению графика $R_2(\tau)$ по оси τ (рис. 4.10, а). Интервал корреляции увеличился в $f_1/F_1 = 5$ раз.

3. Найдем аналогичные характеристики для шума, спектр которого обозначен на рис. 4.9 двойной штриховкой. От предыдущего этот случай отличается положением спектральной полосы на оси частот. Шум с подобным спектром называют *узкополосным,* (при $\Omega_1/\omega_0 \ll 1$). Дисперсия этого шума σ_3^2, очевидно, не отличается от σ_2^2.

Корреляционная функция

$$B_3(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-(\omega_0+\Omega_1/2)}^{-(\omega_0-\Omega_1/2)} W_1(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_0-\Omega_1/2}^{\omega_0+\Omega_1/2_1} W_1(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_0-\Omega_1/2}^{\omega_0+\Omega_1/2} W_1(\omega)\cos\omega\tau d\omega = 2\cdot 10^{-7}\frac{1}{2\pi\tau}\left[\frac{\sin(\omega_0+\Omega_1/2)\tau}{\tau} - \frac{\sin(\omega_0-\Omega_1/2)\tau}{\tau}\right] = \qquad (4.43)$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\frac{1}{2\pi\tau}\cdot 2\sin\frac{\Omega_1\tau}{2}\cos\omega_0\tau = 2\cdot 10^{-7}\cdot 2F_1\frac{\sin\Omega_1\tau/2}{\Omega_1\tau/2}\cos\omega_0\tau.$$

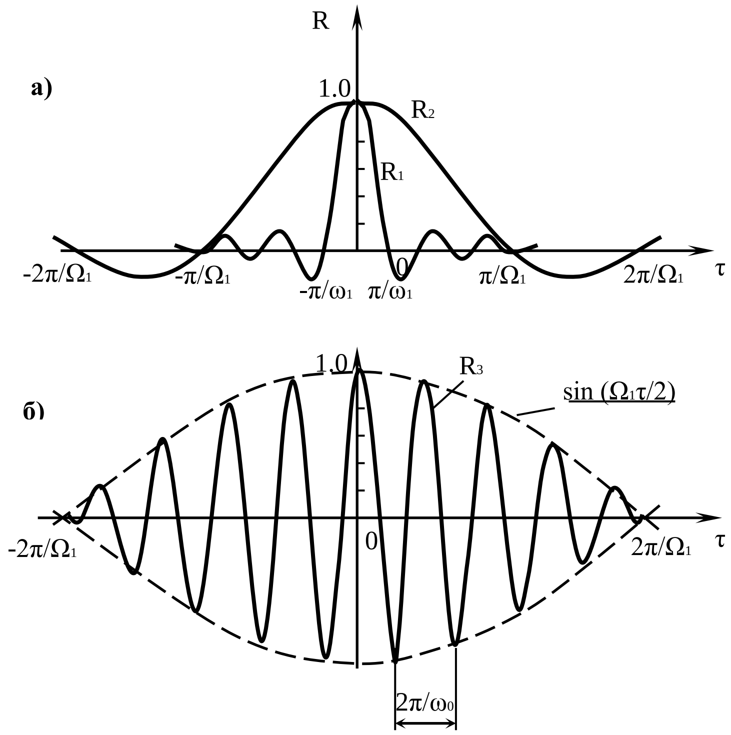

Рис. 4.10. Нормированная корреляционная функция случайного процесса с энергетическим спектром, равномерным в полосе: а) $|\omega| \le \omega_1$ и $|\omega| \le \Omega_1 = \omega_1/5$;
б) $\omega_0 - \Omega/2 \le \omega \le \omega_0 + \Omega/2$.

Нормированная корреляционная функция (рис. 4.10,б)

$$[R_3(\tau) = \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \cos\omega_0\tau. \qquad (4.44)$$

Огибающая функции $R_3(\tau)$ *(штриховая линия) совпадает по форме с функций* $R_2(\tau)$*, однако эта функция имеет вдвое большую протяженность. Высокочастотное заполнение функции* $R_3(\tau)$ *имеет частоту* ω_0*, равную центральной частоте спектра шума (см. рис. 4.9).*

График нормированной корреляционной функции, показанный на рис. 4.10,6, позволяет составить представление о характере шумового колебания с

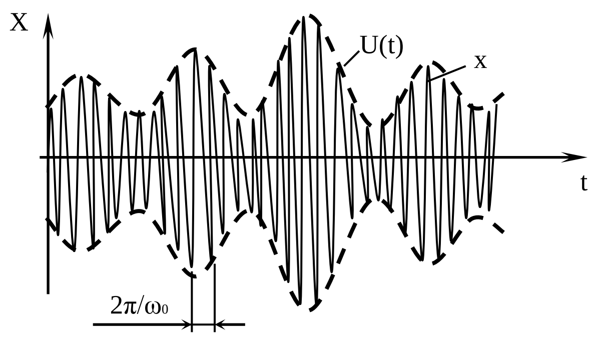

Рис 4.11. Примерный вид реализации случайного процесса, корреляционная функция которого показана на рис. 4.10,6 (масштабы по осям t и τ разные).

узкополосным спектром. Осцилляции корреляционной функции с частотой ω_0

указывают на то, что и мгновенное значение шумового колебания изменяется *в среднем* с частотой ω_0. Напомним, что корреляционная функция гармонического колебания является также гармонической функцией той же частоты (см. § 2.16). Изменение же огибающей корреляционной функции по закону $\frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2}$ указывает на то, что огибающая шумового колебания являющаяся случайной величиной, изменяется во времени относительно медленно, подобно функции времени, спектр которой ограничен наивысшей частотой Ω_1. Примерный вид *шумового* колебания соответствующего корреляционной функции (4.44), представлен на рис. 4.11 (в измененном масштабе времени по оси абсцисс).

Итак, шумовое колебание с узкополосным спектром следует представлять себе как высокочастотное колебание с медленно (по сравнению с частотой ω_0) изменяющимися амплитудой и фазой:

$$x(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)], \qquad (4.45)$$

где ω_0 — центральная частота спектра шума.

Следует подчеркнуть, что все параметры этого колебания - амплитуда, фаза и частота — являются случайными функциями времени.