Лекция 27

Цифровая фильтрация сигнала

Предмет цифровой фильтрации данных (сигналов) является естественным введением в широкую и фундаментальную область цифровой обработки информации. Под фильтрацией будем понимать любое преобразование информации (сигналов, результатов наблюдений), при котором во входной последовательности обрабатываемых данных целенаправленно изменяются определенные соотношения (динамические или частотные) между различными компонентами этих данных.

К основным операциям фильтрации информации относят операции сглаживания, прогнозирования, дифференцирования, интегрирования и разделения сигналов, а также выделение информационных (полезных) сигналов и подавление шумов (помех). Основными методами цифровой фильтрации данных являются частотная селекция сигналов и оптимальная (адаптивная) фильтрация.

В общем случае термином ***Цифровой фильтр*** называют аппаратную или программную реализацию математического алгоритма, входом которого является цифровой сигнал, а выходом – другой цифровой сигнал с определенным образом модифицированной формой и/или амплитудной и фазовой характеристикой. Классификация цифровых фильтров обычно базируется на функциональных признаках алгоритмов цифровой фильтрации, согласно которому ЦФ подразделяются на 4 группы: фильтры частотной селекции, оптимальные (квазиоптимальные), адаптивные и эвристические. Наиболее изученными и опробованными на практике являются ЦФ частотной селекции.

В одномерной дискретной линейной системе связь между входом и выходом (входной и выходной дискретными последовательностями значений сигнала – отсчетами), задается линейным оператором преобразования TL:

$$y(k\Delta t) = TL\{x(k\Delta t)\}.$$

Это выражение отображает краткую запись линейного разностного уравнения:

$$\sum_{m=0}^{M} a_m\, y(k\Delta t-m\Delta t) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k\Delta t-n\Delta t),$$

где k = 0, 1, 2, …- порядковый номер отсчетов, Δt - интервал дискретизации сигнала, a_m и b_n - вещественные или, в общем случае, комплексные коэффициенты. Положим $a_0 = 1$, что всегда может быть выполнено соответствующей нормировкой уравнения, и, принимая в дальнейшем $\Delta t = 1$, т.е. переходя к числовой нумерации цифровых последовательностей значений сигналов, приведем его к виду: $y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m)$.

Оператор, представленный правой частью данного уравнения, получил название цифрового фильтра (ЦФ), а выполняемая им операция - цифровой фильтрации данных (информации, сигналов). Если хотя бы один из коэффициентов a_m или b_n зависит от переменной k, то фильтр называется параметрическим, т.е. с переменными параметрами. Ниже мы будем рассматривать фильтры с постоянными коэффициентами (инвариантными по аргументу).

Основные достоинства цифровых фильтров по сравнению с аналоговыми.

- Цифровые фильтры могут иметь параметры, реализация которых невозможна в аналоговых фильтрах, например, линейную фазовую характеристику.
- ЦФ не требуют периодического контроля и калибровки, т.к. их работоспособность не зависит от дестабилизирующих факторов внешней среды, например, температуры.
- Один фильтр может обрабатывать несколько входных каналов или сигналов.
- Входные и выходные данные можно сохранять для последующего использования.
- Точность цифровых фильтров ограничена только используемой разрядностью отсчетов (длиной слов).
- Фильтры могут использоваться при очень низких частотах и в большом диапазоне частот, для чего достаточно только изменять частоту дискретизации данных.

Нерекурсивные фильтры. При нулевых значениях коэффициентов a_m уравнение переходит в уравнение линейной дискретной свертки функции x(k) с оператором b_n: $y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k-n)$. Значения выходных отсчетов свертки для любого аргумента k определяются текущим и "прошлыми" значениями входных отсчетов. Такой фильтр называется нерекурсивным цифровым фильтром (НЦФ). Интервал суммирования по n получил название "окна" фильтра. Окно фильтра составляет N+1 отсчет, фильтр является односторонним каузальным, т.е. причинно обусловленным текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала, и выходной сигнал не может опережать входного. Каузальный фильтр может быть реализован физически в реальном масштабе времени. При $k<n$, а также при $k<m$ для фильтра (2.1.2), проведение фильтрации возможно только при задании начальных условий для точек $x(-k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, и $y(-k)$, $k = 1, 2, \dots, M$. Как правило, в качестве начальных условий принимаются нулевые значения, или продление первых отсчетов входных сигналов или его тренда назад по аргументу.

Для операции фильтрации характерны следующие основные свойства:

- Дистрибутивность: $h(n) \circledast [a(k)+b(k)] = h(n) \circledast a(k)+h(n) \circledast b(k)$.
- Коммутативность: $h(n) \circledast a(k) \circledast b(k) = a(k) \circledast b(k) \circledast h(n)$.
- Ассоциативность: $[a(k) \circledast b(k)] \circledast h(n) = h(n) \circledast a(k) \circledast b(k)$.

Фильтрация однозначно определяет выходной сигнал y(k) для установленного значения входного сигнала s(k) при известном значении импульсного отклика фильтра h(n).

Рекурсивные фильтры.

Фильтры, которые описываются полным разностным уравнением

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n\, x(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m\, y(k-m),$$

принято называть рекурсивными цифровыми фильтрами (РЦФ), так как в вычислении текущих выходных значений участвуют не только входные данные, но и значения выходных данных фильтрации, вычисленные в предшествующих циклах расчетов. С учетом последнего фактора рекурсивные фильтры называют также фильтрами с обратной связью, положительной или отрицательной в зависимости от знака суммы коэффициентов a_m. По существу, полное окно рекурсивного фильтра состоит из двух составляющих: нерекурсивной части b_n, ограниченной в работе текущими и "прошлыми" значениями входного сигнала (при реализации на ЭВМ возможно использование и “будущих” отсчетов сигнала) и рекурсивной части a_m, которая работает только с "прошлыми" значениями выходного сигнала.

Импульсная реакция фильтров

Если на вход нерекурсивного фильтра подать единичный импульс (импульс Кронекера), расположенный в точке k = 0, то на выходе фильтра мы получим его реакцию на единичный входной сигнал, которая определяется весовыми коэффициентами b_n оператора фильтра:

$$y(k) = TL[\delta(0)] = b_n \circledast \square \delta(k-n) = h(k) \equiv b_n.$$

Для рекурсивных фильтров реакция на импульс Кронекера зависит как от коэффициентов b_n фильтра, так и от коэффициентов обратной связи a_m:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n \circledast (k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m\, y(k-m) = h_k.$$

Функция h(k), которая связывает вход и выход фильтра по реакции на единичный входной сигнал и однозначно определяется оператором преобразования фильтра, получила название импульсного отклика фильтра (функции отклика). Если произвольный сигнал на входе фильтра представить в виде линейной комбинации взвешенных импульсов Кронекера

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)\, x(k-n),$$

то, с использованием функции отклика, сигнал на выходе фильтра можно рассматривать как суперпозицию запаздывающих импульсных реакций на входную последовательность взвешенных импульсов:

$$y(k) = \Sigma_n h(n) \square \delta(n)\, x(k-n)) \equiv \Sigma_n h(n)\, x(k-n).$$

Для нерекурсивных фильтров пределы суммирования в последнем выражении устанавливаются непосредственно по длине импульсного отклика h(n). Для рекурсивных фильтров длина импульсного отклика, в принципе, может быть бесконечной. Определение импульсной реакции на практике требуется, как правило, только для рекурсивных фильтров, так как импульсная реакция для НЦФ при известных значениях коэффициентов b(n), специального определения не требует: $h(n) \equiv b(n)$. Если выражение для системы известно в общей форме, определение импульсной реакции производится подстановкой в уравнение системы импульса Кронекера с координатой k = 0 при нулевых начальных условиях. Сигнал на выходе системы будет представлять собой импульсную реакцию системы. Определение импульсной реакции физической системы обычно производится подачей на вход системы ступенчатой функции (функции Хевисайда), которая равна $u(k) = 1$ при $k \geq 0$, и $u(k) = 0$ при $k < 0$:

$$g(k) = \sum_{n=0}^{N} h(n)\, u(k-n) = \sum_{n=0}^{k} h(n). \quad \text{Отсюда:}$$

$$h(k) = g(k) - g(k-1).$$

Функция g(k) получила название переходной характеристики системы (перехода из одного статического состояния в другое).

Z-преобразование.

Удобным методом решения разностных уравнений линейных систем является z-преобразование. Применяя z-преобразование к обеим частям разностного уравнения, с учетом сдвига функций ($y(k-m) \Leftrightarrow z^m\, Y(z)$), получаем:

$$Y(z) \sum_{m=0}^{M} a_m z^m = X(z) \sum_{n=0}^{N} b_n z^n,$$

где X(z),Y(z)- соответствующие z-образы входного и выходного сигнала. Отсюда, полагая $a_o = 1$, получаем в общей форме функцию связи выхода фильтра с его входом - уравнение передаточной функции системы в z-области:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n \Big/ (1+ \sum_{m=1}^{M} a_m z^m).$$

Для НЦФ, при нулевых коэффициентах a_m: $H(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n$.

При проектировании фильтров исходной, как правило, является частотная передаточная функция фильтра H(ω), по которой вычисляется ее Z-образ H(z) и обратным переходом в пространство сигналов определяется алгоритм обработки данных. В общей форме для выходных сигналов фильтра: $Y(z) = H(z)\cdot X(z)$.

$$Y(z)\cdot(1+\sum_{m=1}^{M} a_m z^m) = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^n$$

$$Y(z) = X(z)\sum_{n=0}^{N} b_n z^n - Y(z)\sum_{m=1}^{M} a_m z^m.$$

После обратного Z-преобразования последнего выражения:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N} b_n x(k-n) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(k-m).$$

При подаче на вход фильтра единичного импульса Кронекера δ_o, имеющего z-образ $\delta(z) = z^n = 1$, сигнал на выходе фильтра будет представлять собой импульсную реакцию фильтра $y(k) \equiv h(k)$, при этом:

$$H(z) = Y(z)/\delta(z) = Y(z) = TZ[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k,$$

т.е. передаточная функция фильтра является z-образом его импульсной реакции. При обратном z-преобразовании передаточной функции соответственно получаем импульсную характеристику фильтра: $h(k) \Leftrightarrow H(z)$.

Если функция H(z) представлена конечным степенным полиномом, что, как правило, характерно для НЦФ, являющихся КИХ-фильтрами, то обратное z-преобразование осуществляется элементарно идентификацией коэффициентов по степеням z. Передаточная функция РЦФ также может быть представлена степенным полиномом прямым делением числителя на знаменатель правой части уравнения передаточной функции системы в z-области, однако результат при этом может оказаться как конечным, так и бесконечным, т.е. система может иметь либо конечную, либо бесконечную импульсную характеристику. Практически используемые рекурсивные фильтры обычно имеют бесконечную импульсную характеристику (БИХ-фильтры) при конечном числе членов алгоритма фильтрации.

Примеры.

1. Передаточная функция РЦФ: $H(z) = (1-z^5)/(1-z)$.

   Прямым делением числителя на знаменатель получаем: $H(z) = 1+z+z^2+z^3+z^4$.

   $H(z) \Leftrightarrow h(n) = \{1,1,1,1,1\}$. Фильтр РЦФ является КИХ-фильтром.

2. Передаточная функция: $H(z) = 1/(1-2z)$.

Методом обратного z-преобразования: $h(n) = 2^n$. Фильтр РЦФ является БИХ-фильтром.

Устойчивость фильтров. Фильтр называется устойчивым, если при любых начальных условиях реакция фильтра на любое ограниченное воздействие также ограничена. Критерием устойчивости фильтра является абсолютная сходимость отсчетов его импульсного отклика: $\Sigma_n |h(n)| < \infty$.

Области применения НЦФ и РЦФ обычно обуславливаются видом их передаточных функций. В принципе, нерекурсивные цифровые фильтры универсальны и способны реализовать любые практические задачи обработки сигналов. Это и понятно, т.к. реакция РЦФ на единичный импульс Кронекера представляет собой импульсный отклик НЦФ, а, следовательно, задачи, решаемые РЦФ, могут выполняться и НЦФ, но при условии отсутствия ограничений по размерам окна. В первую очередь это касается реализации БИХ-фильтров с незатухающим или слабо затухающим импульсным откликом, например, интегрирующих или фильтров рекурсивной деконволюции. Ограничение по размерам окна является скорее не теоретическим (бесконечных операторов НЦФ не требуется, максимум – двойная длина входного сигнала для двусторонних НЦФ), а чисто практическим. Нет смысла применять НЦФ с огромными размерами операторов и тратить машинное время, если та же задача во много раз быстрее решается рекурсивным фильтром.

Существенным преимуществом НЦФ является их устойчивость, возможность выполнения в виде двусторонних симметричных фильтров, не изменяющих фазу выходных сигналов относительно входных, и реализации строго линейных фазовых характеристик. С другой стороны, нерекурсивные фильтры могут быть преобразованы в рекурсивные фильтры, если есть возможность z-полином передаточной функции НЦФ выразить в виде отношения двух коротких z-полиномов РЦФ, что может дать существенное повышение производительности вычислений. Как правило, такая возможность имеется для сходящихся степенных рядов. Отношение двух z-полиномов позволяет реализовать короткие и очень эффективные фильтры с крутыми срезами на частотных характеристиках.

Структурные схемы цифровых фильтров

Алгоритмы цифровой фильтрации сигналов (цифровых фильтров) представляются в виде структурных схем, базовые элементы которых показаны на рисунке 1 вместе с примерами структурных схем фильтров. Как правило, структурные схемы соответствуют программной реализации фильтров на ЭВМ, но не определяют аппаратной реализации в специальных радиотехнических устройствах, которая может существенно отличаться от программной реализации.

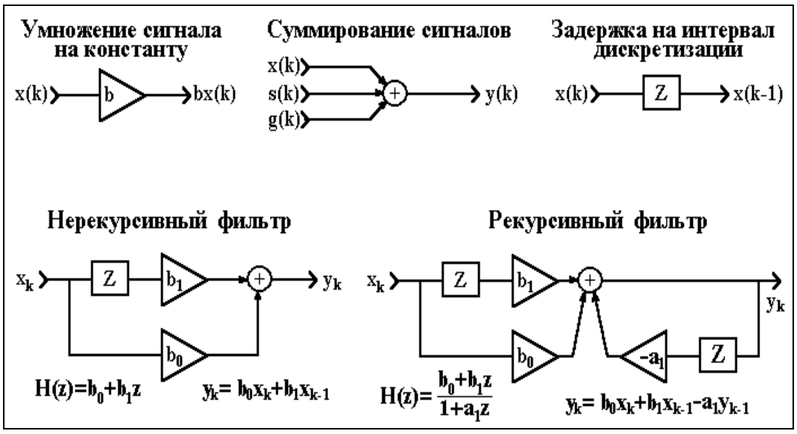

Рис. 1. Структурные схемы цифровых фильтров.

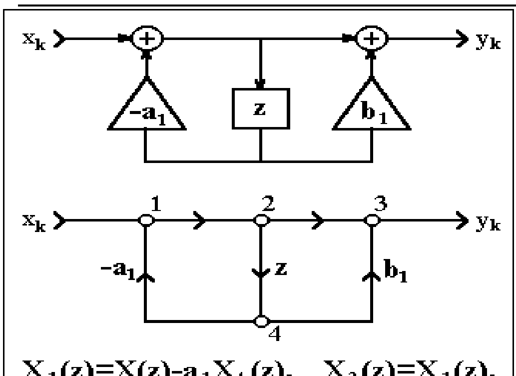

Рис. 2. Граф фильтра.

Графы фильтров. Наряду со структурной схемой фильтр может быть представлен в виде графа, который отображает диаграмму прохождения сигналов, и состоит из направленных ветвей и узлов.

Пример структурной схемы фильтра с передаточной функцией $H(z) = (1+b_1z)/(1+a_1z)$ и графа, ей соответствующего, приведен на рисунке 2. С каждым i - узлом графа связано значение сигнала $x_i(k)$ или его образа $X_i(z)$, которые определяются суммой всех сигналов или z-образов входящих в узел ветвей. В каждой ij - ветви (из узла i в узел j) происходит преобразование сигнала в соответствии с передаточной функцией ветви, например задержка сигнала или умножение на коэффициент.