Лекция 11. Применение производной в экономической теории

План:

1) Экстремумы функции одной переменной;
2) Производная в экономическом анализе.

11.1. Экстремумы функции одной переменной

Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) во всех точках промежутка Х, то функция $y = f(x)$ монотонно *возрастает (убывает)* на промежутке Х.

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если существует интервал, содержащий точку x_0, такой, что для всех x из этого интервала имеет место неравенство $f(x_0) \geq f(x),\ \ f(x_0) \leq f(x)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума: в точке экстремума функции ее производная либо равна нулю, либо не существует.

Первое достаточное условие экстремума: если в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна, а производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 - точка экстремума: максимума, если знак меняется с «+» на «-», и минимума, если с «-» на «+».

Второе достаточное условие экстремума: если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка максимума функции. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка минимума функции.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх (вниз)* на промежутке X, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1 + x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1 + x_2)}{2}\right). \qquad (11.1)$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются *точками перегиба.*

Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) на промежутке, то функция $y = f(x)$ является *выпуклой вниз (вверх)* на этом промежутке.

В *точке перегиба* вторая производная функции равна нулю или не существует.

Если $f''(x)$ функции $y = f(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка x_0 является *точкой перегиба* функции $y = f(x)$. При этом $y = f(x)$ существует в точке x_0.

11.2. Производная в экономическом анализе

Пусть $C(x)$ - издержки производства, где x - объем выпускаемой продукции. Средние издержки находятся по формуле $\dfrac{C(x)}{x}$.

Предельные издержки $y' = C'(x)$. Характеризуют прирост переменных затрат на производство дополнительной продукции.

Эластичность функции определяется соотношением

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'_x. \qquad (11.2)$$

Эластичность функции показывает на сколько процентов изменится y при изменении x на один процент.

Если $|E_x(y)| > 1$, то изменение y эластично по x. Если $|E_x(y)| < 1$, то изменение y неэластично по x. Если $|E_x(y)| = 1$, то изменение y нейтрально по x.

Если x - национальный доход, $C(x)$ - функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$ - функция сбережения, то

$$x = C(x) + S(x). \qquad (11.3)$$

Дифференцируя (11.3), получим, что

$$\frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dx}=1,$$

где $\frac{dC}{dx}$ - предельная склонность к потреблению;

$\frac{dS}{dx}$ - предельная склонность к сбережению.

Пример. Зависимость между спросом q и ценой p за единицу продукции, выпускаемой некоторым предприятием, задается соотношением $q=16-\sqrt{p}$. Найти эластичность спроса. Выяснить, при каких значениях цены спрос является эластичным, нейтральным и неэластичным. Какие рекомендации о цене можно дать руководителю предприятия при $p=110$ и $p=200$ ден.ед?

Решение.

Эластичность спроса найдем по формуле (11.2):

$$E_p(q)=\frac{p}{16-\sqrt{p}}\left(16-\sqrt{p}\right)'=-\frac{p}{16-\sqrt{p}}\frac{1}{2\sqrt{p}}=-\frac{\sqrt{p}}{2(16-\sqrt{p})}.$$

Спрос нейтрален, если $\left|-\frac{\sqrt{p}}{2\left(16-\sqrt{p}\right)}\right|=1$. Решая это уравнение, получаем $p\approx 113{,}78$. Учитывая, что $p>0, q>0, p<256$, получим:

при $0<p<113{,}78$ - спрос является неэластичным; при $113{,}78<p<256$ - спрос эластичен.

Рекомендации. Если цена единицы продукции составляет 110 ден.ед., то спрос является неэластичным. Можно повысить цену продукции, выручка при этом будет расти. При стоимости продукции 200 ден. ед. спрос является эластичным. В данном случае целесообразно рассмотреть предложение о снижении цены, выручка от реализации будет расти в результате увеличения спроса на продукцию.