

Латинские, греко-латинские и гипер-греко-латинские квадраты



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Латинские квадраты

Латинский квадрат — таблица $n \times n$, заполненная n различными символами таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались все n символов (каждый по одному разу). Ниже приводятся два примера:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & d & c \\ b & c & a & d \\ c & d & b & a \\ d & a & c & b \end{bmatrix}$$



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Стандартными или **каноническими латинскими квадратами** называются такие квадраты, у которых первая строка и первый столбец построены в алфавитном порядке (элементы квадрата — буквы) или в порядке натурального ряда (элементы квадрата — числа) .

Построены эти квадраты путем одношаговой циклической перестановки: вторая строка строится перестановкой в конец строки первого элемента первой строки, третья строка — перестановкой в конец первого элемента второй строки и т. д. Одношаговая циклическая перестановка — это наиболее простой способ построения латинского квадрата.

В общем случае $n \times n$ латинский квадрат может быть построен при $n-1$ одношаговых циклических перестановках. Число латинских квадратов зависит от размера квадрата и для $n > 3$ оно достаточно велико. Так, имеется 576 латинских квадратов 4×4 , 161 280 латинских квадратов 5×5



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Ортогональные латинские квадраты.

Два латинских квадрата называются ортогональными, если все пары символов (a, b) различны, где a — символ в некоторой клетке первого латинского квадрата, а b — символ в той же клетке второго латинского квадрата.

Пример пары ортогональных латинских квадратов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Легко видеть, что в соответствующем
квадрате из пар все пары различны
(магический квадрат):

$$\begin{bmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Греко-латинский квадрат можно рассматривать как результат наложения двух ортогональных ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ.

Пример

Греко-латинский квадрат, полученный наложением двух латинских квадратов

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| aα | bβ | cγ | dδ |
| bγ | aδ | dα | cβ |
| cδ | dγ | aβ | bα |
| dβ | cα | bδ | aγ |



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Если в каждой диагонали латинского квадрата все элементы различны, такой латинский квадрат называется диагональным. Пары ортогональных диагональных латинских квадратов существуют для всех порядков, кроме 2, 3 и 6. Пример пары диагональных ортогональных латинских квадратов 5-го порядка:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Квадрат из пар элементов двух ортогональных латинских квадратов называется греко-латинский квадратом.



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Использование латинских квадратов для планирования экспериментов.

К планированию эксперимента по схеме латинского квадрата прибегают при исследовании влияния на процесс трех факторов **A**, **B** и **C**. При этом факторы **A** и **B** могут быть связаны с самим исследованием, а в качестве фактора **C** может рассматриваться неоднородность материала

Предположим, что нужно провести несколько экспериментов, зависящих от 3 параметров, так чтобы для каждой пары параметров были опробованы все n^2 вариантов.

Тогда нужно взять любой латинский квадрат порядка n и провести n^2 экспериментов с параметрами a = номер строки, b = номер столбца, c = значение в клетке латинского квадрата.



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Латинский квадрат 3×3

| A | B | | |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| | b_1 | b_2 | b_3 |
| a_1 | c_1 y_1 | c_2 y_2 | c_3 y_3 |
| a_2 | c_2 y_4 | c_3 y_5 | c_1 y_6 |
| a_3 | c_3 y_7 | c_1 y_8 | c_2 y_9 |

Планирование эксперимента по схеме латинского квадрата было использовано на процесс органического синтеза трех факторов: А - типа галоидного алкила на уровнях a_1 , a_2 и a_3 ; В - типа растворителя на уровнях b_1 , b_2 и b_3 и С - отношения количества мономера к растворителю. Результаты – выход полимера в процентах у. Проводится всего 9 экспериментов. Оценивается значимость влияния рассматриваемых факторов на процесс синтеза.

Где у- отклик или значение полученной характеристики



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Греко-латинский квадрат 3×3

| A | B | | |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| | b_1 | b_2 | b_3 |
| a_1 | c_1 d_1 | c_2 d_2 | c_3 d_3 |
| a_2 | c_2 d_3 | c_3 d_1 | c_1 d_2 |
| a_3 | c_3 d_2 | c_1 d_1 | c_2 d_3 |

При планировании эксперимента по схеме греко-латинского квадрата можно дополнительно исследовать влияние еще одного фактора D.



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Например, если есть система, на которую действуют 4 различных параметра (например воздействие N различных рекламных роликов на население N различных возрастных, социальных и этнических групп), которые могут принимать по N значений нужно рассмотреть греко-латинский квадрат порядка N . Тогда параметры будут соответствовать ряду, столбцу, первому и второму числу. таким образом можно провести N^2 экспериментов, вместо N^4 (в случае полного перебора вариантов).

Для этого, например, удобно провести планирование эксперимента в соответствии с греко-латинским квадратом 4×4 .



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Греко-латинский квадрат 4×4

| A | B | | | |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 |
| a_1 | c_1 d_1 | c_2 d_2 | c_3 d_3 | c_4 d_4 |
| a_2 | c_2 d_3 | c_1 d_4 | c_4 d_1 | c_3 d_2 |
| a_3 | c_3 d_4 | c_4 d_3 | c_1 d_2 | c_2 d_1 |
| a_4 | c_4 d_2 | c_3 d_1 | c_2 d_4 | c_1 d_3 |



Гипер-греко-латинский квадрат 4-го порядка

| A | B | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | C=0 | C=1 | C=2 | C=3 | C=4 |
| | D=0 | D=1 | D=2 | D=3 | D=4 |
| | E=0 | E=1 | E=2 | E=3 | E=4 |
| | F=0 | F=1 | F=2 | F=3 | F=4 |
| 1 | C=1 | C=2 | C=3 | C=4 | C=0 |
| | D=2 | D=3 | D=4 | D=0 | D=1 |
| | E=3 | E=4 | E=0 | E=1 | E=2 |
| | F=4 | F=0 | F=1 | F=2 | F=3 |
| 2 | C=2 | C=3 | C=4 | C=0 | C=1 |
| | D=4 | D=0 | D=1 | D=2 | D=3 |
| | E=1 | E=2 | E=3 | E=4 | E=0 |
| | F=3 | F=4 | F=0 | F=1 | F=2 |
| 3 | C=3 | C=4 | C=0 | C=1 | C=2 |
| | D=1 | D=2 | D=3 | D=4 | D=0 |
| | E=4 | E=0 | E=1 | E=2 | E=3 |
| | F=2 | F=3 | F=4 | F=0 | F=1 |
| 4 | C=4 | C=0 | C=1 | C=2 | C=3 |
| | D=3 | D=4 | D=0 | D=1 | D=2 |
| | E=2 | E=3 | E=4 | E=0 | E=1 |
| | F=1 | F=2 | F=3 | F=4 | F=0 |

Например за фактор А принимаем тип каучука, за фактор В принимаем тип наполнителя, за фактор С принимаем тип пластификатора, за фактор D принимаем дозировки наполнителя, фактор С принимаем дозировки пластификатора, за фактор F принимаем тип технологической добавки.

Проводится всего на всего 16 экспериментов. Оценивается значимость влияния рассматриваемых шести!!! факторов на различные характеристики резин.



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Математический аппарат расчета результатов эксперимента очень подробно приведен, например, в книге:

Ахназарова С.Л. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии [Текст]: / С.Л. Ахназарова, В.В.Кафаров М.: Высшая школа, 1978. – 319 с.

Имеются автоматизированные программы для расчетов.

Например, пользователь может выбирать между различными планами на Латинских квадратах, имеющих до девяти уровней. Если это возможно, программа также сгенерирует доступные Греко-Латинские и Гипер-Греко-Латинские квадраты. В случаях, когда имеется несколько альтернативных Латинских квадратов, программа выберет один из них случайным образом, либо предложит пользователю выбрать желаемый Латинский квадрат. Пользователь может просмотреть планы в таблице результатов, рандомизировать порядок опытов, добавить пустые столбцы для удобства ввода данных. План можно также сохранить в стандартном файле данных *STATISTICA*. После добавления наблюдаемых значений в этот файл эксперимент может быть затем легко проанализирован. В дополнение к полной таблице дисперсионного анализа модуль *STATISTICA* *Планирование эксперимента* вычислит средние значения для всех факторов. Эти средние могут быть представлены в графическом виде на итоговом графике.)



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Заключение

Применение греко-латинских и гипер-греко-латинских квадратов в качестве планов эксперимента одновременно дает экономию (обычно очень значительную) в числе наблюдений и приводит к упрощению вычислений.

Основным допущением, лежащим в основе применения латинского, греко-латинского квадрата и квадратов высших порядков, является предположение об отсутствии взаимодействий между факторами. Проверить адекватность принятой линейной модели можно только при наличии параллельных опытов.

Благодарю за внимание



ВЯТСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ